LAPORAN PENELITIAN

FUNGSI STARLIKE YANG STRONGLY DENGAN MELIBATKAN OPERATOR INTGERAL CHOI-SAIGO-SRIVASTAVA

UIN SUSKA RIAU

Peneliti:

FITRI ARYANI, S.Si, M.Sc

LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN MASYARAKAT
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2014

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

FUNGSI STARLIKE YANG STRONGLY MENGGUNAKAN OPERATOR INTEGRAL CHOI-SAIGO-SRIVASTAVA

Oleh:

Fitri Aryani

Abstrak

Fungsi *starlike* merupakan salah satu bagian dari subkelas fungsi univalen. Suatu Himpunan $E \subset \mathbb{C}$ dikatakan *starlike* terhadap titik $w_0 \in E$ jika segmen linier yang menghubungkan w_0 kepada titik lain $w \in E$ semuanya berada dalam Eatau dengan kata lain Suatu fungsi f analisis adalah *starlike* dalam U jika dan hanya jika $p(z) = \frac{z\,f'(z)}{f(z)} \in P$. Banyak kajian yang telah dilakukan untuk melihat sifat-sifat fungsi *starlike* ini, baik dengan melibatkan operator integral maupun operator turunan. Penelitian ini melanjutkan penelitian sebelumnya mengenai sifat-sifat fungsi *starlike* dengan menggunakan operator integral Choi-Saigo-Srivastava. Kelanjutannya masih berupa menentukan sifat-sifat fungsi *starlike* namun ditekankan kepada yang *strongly*, artinya apakah fungsi *starlike* yang sudah didapatkan mempunyai sifat *strongly* atau tidak. Dalam menentukan *strongly* dari fungsi *starlike* dlibatkan dua operator integral yaitu operator integral Choi-Saigo-Srivastava dan operator integral Libera. Selain melibatkan operator integral tersebut selanjutnya menggunakan aturan turunan logaritma untuk mendapatkan persamaan baru. Proses yang paling penting adalah menggunakan konsep *starlike* yang *strongly* yang dituangkan dalam lemma 2.3. Berdasarkan hasil pembahasan maka diperoleh bahwa fungsi *starlike* pada penelitian ini adalah *strongly*. Fungsi *starlike* dengan menggunakan operator integral Choi-Saigo-Srivastava diperoleh kesimpulan sebagai berikut $S^*_{\lambda,\mu+1}\,(\alpha;\phi) \subset S^*_{\lambda,\mu}\,(\alpha;\phi)$dan $S^*_{\lambda,\mu}\,(\alpha;\phi) \subset S^*_{\lambda+1,\mu}\,(\alpha;\phi)$ adalah fungsi *starlike* yang *strongly*. Selanjutnya untuk sifat fungsi *starlike* menggunakan operator integral Libera yaitu: **j**ika $f \in S^*_{\lambda,\mu}(\alpha\colon\phi)$, maka $Lc\ f \in S^*_{\lambda,\mu}(\alpha\colon\phi)$ adalah fungsi *starlike* yang *strongly*.

Katakunci: fungsi s*tarlike*, operator integral, *starlike strongly*, fungsi univalen, fungsi *convex*

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Bidang kompleks C pada geometri yang diketahui di matematika merupakan bidang perluasan dari bidang riil R, artinya bidang kompleks C merupakan bidang yang sangat besar dari bidang lain di matematika. Geometri pada bidang kompleks C memerlukan suatu fungsi peubah kompleks yang merupakan pemetaan dari satu bidang ke bidang yang lain, yaitu bidang z dan bidang w, sehingga geometri pada kompleks cukup rumit untuk membayangkannya.

Setiap fungsi peubah kompleks dalam teori fungsi geometri diartikan dalam beberapa keadaan dan diberi nama berdasarkan kepada domain atau daerah asal fungsi tersebut didefinisikan. Sebagai contoh fungsi *starlike* (bakbintang), *convex* (cembung) dan *close-to-convex* (hampir cembung). Semua fungsi tersebut merupakan subkelas-subkelas dari bentuk fungsi univalen yang ternormalkan dengan $f(0) = 0 \ dan \ f'(0) = 1$ dan dilambangkan sebagai kelas S.

Fungsi univalen merupakan satu dari cabang yang amat penting dalam bidang teori fungsi geometri. Secara umum fungsi yang ternormalkan dan dilambangkan dengan S dapat di bentuk seperti berikut

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Berdasarkan bentuk fungsi tersebut banyak hal yang dapat dikaji, antaranya terkaan atau *estimate* dari koefisien a_n. Penelitian ini pertamakali dikaji oleh Bieberbach yang sangat dikenal dalam bidang kompleks yaitu Konjektur Bieberbach (1916). Selanjutnya banyak peneliti matematika mempekenalkan kelas baru yang berdasarkan subkelas dasar dari S dengan melibatkan berbagai bentuk operator, baik operator integral maupun operator turunan. Berdasarkan kelas tersebut juga dapat dikaji fungsian fekete-szego (1933) yaitu suatu kajian yang berhubungan dengan terkaan bieberbach pada kelas-kelas yang disebutkan seperti di atas.

Banyak peneliti mengkaji mengenai sifat-sifat subkelas fungsi univalent yaitu fungsi starlike, fungsi convex dan fungsi close-to-convex yang melibatkan operator integral dan operator turunan diantaranya pada tahun 2002 Choi, Saigo dan Srivastava melakukan penelitian mengenai beberapa sifat-sifat pada subkelas fungsi univalen dengan melibatkan operator integral yang berjudul " *Some inclusion properties of a certain family of integral operators*". Selanjutnya pada tahun 2009 Khalida Inayat Noor dan Saqib Hussain mengkaji aplikasi operator integral untuk melihat sifat-sifat subkelas fungsi analitik dengan judul jurnal "*An Integral Operator and Its Aplication on Certain Classes of Analytic Functions*". Pada tahun yang sama Maslina Darus dan Rabha W. Ibrahim melakukan kajian sifat-sifat Subkelas fungsi univalen secara general dengan menggunakan operator integral dan melibatkan integral Noor dengan judul jurnal " *On Inclusion Properties of Generalized Integral Operator Involving Noor Integral*".

Peneliti juga telah mengkaji beberapa kajian mengenai sifat-sifat subkelas fungsi univalen dengan melibatkan operator integral yang berbeda-beda, diantaranya pada tahun 2010 dengan judul penelitian "*On Inclusion Properties For Subclasses Involving Integral Operator*" . Selanjutnya pada tahun 2012 peneliti melanjutkan penelitian dengan operator integral yang lain lagi masih mengkaji sifat-sifat subkelas fungsi univalen dengan judul penelitian" *Sifat-sifat Subkelas Fungsi Univalen Menggunakan Operator Integral (Operator Integral Jung, Kim, Srivastava).* Penelitian terakhir pada tahun 2013 dengan mengaplikasikan operator integral Choi-Saigo-Srivastava untuk melihat sifat-sifat subkelas fungsi univalen yang lebih umum dengan judul penelitian " *Aplikasi Operator Integral (Choi-Saigo-Srivastava) pada Sifat-sifat Subkelas Fungsi Univalen*".

Selain menentukan sifat-sifat subkelas fungsi univalen (fungsi *starlike*, fungsi *convex* dan fungsi *close-to-convex*) para peneliti dibidang analisiskompleks melakukan penelitian berlanjut pada kajian-kajian yang memperkuat fungsi starlike dan fungsi convex, yang disebut dengan s*trongly starlike* dan *strongly convex*. Kajian-kajian tersebut diantaranya pada tahun 1997 Mamoru Nunokawa dan kawan-kawan meneliti mengenai fungsi *starlike* yang *strongly* dengan jurnalnya yang berjudul "*Some result for strongly starlike functions*". Selanjutnya pada tahun 2001 Jin-Lin Liu meneliti masih mengenai fungsi *starlike* yang *strongly*, namun melibatkan operator integral dengan judul "*Certain Integral Operator and strongly starlike functions*". Masih peneliti yang sama pada tahun 2002 dia mengkaji lagi hal yang sama tetapi operator yang berbeda yaitu" *A linear* *operator and strongly starlike functions*". Selanjutnya masih peneliti yang sama pada tahun 2004 dia masih mengkaji hal yang sama juga namun dengan operator yang berbeda dengan judul "*Strongly starlike functions associated with the Dziok-Srivastava Operator*"

Berdasarkan latar belakang tersebut maka peneliti tertarik melakukan penelitian untuk memperkuat penelitian sebelumnya dalam menentukan fungsi *starlike* yang *strongly* dengan melibatkan operator integral yang telah diperkenlakan oleh Choi-Saigo-Srivastava pada tahun 2002 dan melibatkan juga integral Libera.

1.2 Permasalahan

Dari uraian dalam bagian latar belakang, maka penelitian ini akan mengangkat permasalahan bagaimana fungsi starlike yang strongly dengan melibatkan operator integral yang telah diperkenalkan oleh Choi-Saigo-Srivastava pada tahun 2002 dan melibatkan juga integral Libera.

1.3 Tujuan dan Manfaat

Penelitian ini bertujuan untuk :

1. Mendapatkan fungsi *starlike* yang *strongly* dari subkelas-subkelas fungsi univalen dengan melibatkan integral operator yang telah diperkenalkan oleh Choi-Saigo-Srivastava pada tahun 2002.
2. Mendapatkan fungsi *starlike* yang *strongly* dari subkelas-subkelas fungsi univalen dengan melibatkan integral Libera.

3. Memberikan kontribusi penelitian di bidang matematika terutama bidang teori fungsi geometri kompleks mengenai fungsi *starlike* yang *strongly* dari fungsi univalen.
4. Menghasilkan penelitian baru yang bermanfaat bagi perkembangan dunia sains.

1.4 Batasan Penelitian

Untuk mengetahui komponen penelitian maka pembatasan perlu dilakukan, yaitu :

1. Penelitian ini merupakan suatu studi eksploratif terhadap pengembangan dibidang analisis kompleks yang telah ada sebelumnya.
2. Penelitian dibatasi hanya pada subkelas pada fungsi univalen yang ada yaitu: fungsi *starlike*, fungsi *convex* dengan mengambil

$$p(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z(I_{\lambda+1,\mu}f(z))'}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)} - \alpha\right]$$

3. Penelitian juga dibatasi dengan operator integral yang telah diperkenalkan oleh Choi, Saigo dan Srivastava pada tahun 2002 ,yaitu

$I_{\lambda,\mu}f(z) = \left(f_{\lambda,\mu} * f\right)(z),\ \ \lambda > -1, \mu > 0;$

dengan $\frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}} * f_{\lambda,\mu} = \frac{z}{(1-z)^{\mu}}$ dan

$I_{\lambda,\mu}f(z) = z_2F_1(\mu, 1, \lambda+1; z) * f(z)$

mereka juaga telah membuktikan bahwa

$$z\left[I_{\lambda+1,\mu}f(z)\right]' = (\lambda+1)\, I_{\lambda,\mu}f(z) - \lambda I_{\lambda+1,\mu}f(z)$$

$$z\left[I_{\lambda,\mu}f(z)\right]' = \mu\, I_{\lambda,\mu+1}f(z) - (\mu-1)I_{\lambda,\mu}f(z)$$

4. Penelitian ini selain mengkaji sifat-sifat subkelas pada fungsi univalent dengan melibatkan operator yang diberikan juga menentukan sifat-sifat yang lain dengan melibatkan integral Libera, yaitu

$$L_c(f) = L_c(f)(z) = \frac{c+1}{z^c}\int_0^z t^{c-1}\, f(t)\, dt$$

Berdasarkan integral tersebut didapat sebuah persamaan

$$z\left(I_{\lambda,\mu}f(z)\right) L_c(f)(z)' = (c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - cI_{\lambda,\mu}f(z)L_c(f)(z)$$

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fungsi Univalen

Definisi 2.1 (Duren, P.l, 1983) Suatu fungsi dikatakan univalen ataupun disebut fungsi *Schlicht* dalam domain $U \subset \mathbb{C}$ jika ia tidak mengambil nilai yang sama iaitu $f(z_1) \neq f(z_2)$ untuk semua titik z_1 dan z_2 dengan $z_1 \neq z_2$. Sering disebut fungsi satu-satu.

Fungsi yang ditekankan di sini merupakan fungsi yang ternormalkan dengan $f(0) = 0$dan $f'(0) = 1$ dan dilambangkan sebagai kelas S. Untuk setiap $f \in S$, f oleh ditulis dalam bentuk deret Taylor sebagai berikut:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad , z \in U \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1)$$

Contoh utama pada fungsi bagi kelas S adalah fungsi Koebe

$$k(z) = z(1-z)^{-2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$$

Fungsi Koebe memetakan *unit disk U* keseluruh bidang kecuali pada bagian negatif riil dari$-\frac{1}{4}$ ke takterhingga. Ini dapat dilihat dengan lebih jelas apabila ditulis fungsi Koebe sebagai $k(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}$ dan dapat diperhatikan yang fungsi $w(z) = \frac{1+z}{1-z}$ memetakan U secara meneyeluruh keseparuh bidang $Re\,\{w\} > 0$.

Kerana Fungsi Koebe memainkan peranan yang sangat penting di dalam beberapa permasalahan untuk kelas , disebabkan fungsi tersebut yang pertamakali sebagai dasar untuk memaksimumkan $|a_n|$ untuk setiap n. Ini adalah konjektur terkenal Bieberbach, pertama kali diperkenalkan pada tahun 1916. Namun konjektur (terkaan) ini lebih dikenal sebagai Teorem De Brange karena Louis de Brange (1985) mampu memberi pembuktian lengkap terhadap konjektur (terkaan) tersebut.

Selanjutnya pada tahun 1923 Lowner telah menunjukan untuk $|a_3| \leq 3$ juga diperkenalkan persamaan turunan Lowner. Schaeffer dan Spencer (1943) memberikan pembuktian dengan aturan komposisi. Jenkins (1960) menggunakan turunan kuadratik untuk membuktikan ketaksamaan koefisien yang mengakibatkan $|a_3| \leq 3$. Aturan komposisi telah digunakan oleh Garabedian dan Schiffer (1955) untuk membuktikan $|a_3| \leq 4$. Seperti yang dipaparkan di atas bahwa konjektur (terkaan) Bieberbach tersebut telah selesai pencariannya.

2.2 Subkelas fungsi univalen S

a. Fungsi bagian riil positif

Lemma 2.1 Andaikan P adalah kelas yang mempunyai bagian riil positif. Jika untuk semua $q \in P$ dan q adalah kelas fungsi berbentuk

$q(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$, analisis pada U untuk semua $z \in U$, maka $q(0) = 1$ sehingga belaku

$|p_n| \leq 2\,, \quad n = 1{,}2 \ldots$ dan

$$\left|p_2 - \frac{{p_1}^2}{2}\right| \leq 2 - \frac{|p_1|^2}{2}$$

b. Fungsi *Starlike*

Definisi 2.2 (Pommerenke, Ch, 1973) Suatu Himpunan $E \subset \mathbb{C}$ dikatakan bakbintang terhadap titik $w_0 \in E$ jika segmen linier yang menghubungkan w_0 kepada titik lain $w \in E$ semuanya berada dalam E. Himpunan bagi kelas fungsi bakbintang ini dilambangkan dengan S^*.

Teorema 2.1 Suatu fungsi f analisis adalah bakbintang dalam U jika dan hanya jika $p(z) = \frac{z\,f'(z)}{f(z)} \in P$.

c. Fungsi *convex*

Definisi 2.3 Himpunan E dikatakan cembung jika ianya adalah bakbintang pada setiap titik, maksudnya jika segmen linear menghubungkan dua titik pada E yang semunya berada dalam E. Himpunan bagi fungsi cembung ini dilambangkan dengan C.

Teorema 2.2 Suatu fungsi f analisis adalah cembung dalam U jika dan hanya jika $p(z) = 1 + \frac{z\,f\prime(z)}{f(z)} \in P$.

2.3 Subordinasi $(\prec)$

Menyelidiki sifat-sifat pada subkelas – subkelas dari fungsi univalen , tidak cukup dengan menggunakan operator integral ataupun operator turunan saja. Selanjutnya juga diperlukan sutau teori yang dikenal dengan teori subordinasi. Teori subordinasi merupakan peran penting dalam analisis kompleks. Lindelof (1908) orang yang pertamakali memperkenalkan teori subordinasi pada masalah analisi kompleks. Selanjutnya Littlewood (1925) dan Rogosinski (1931) melanjutkan pengembangan teori subordinasi yang merujuk kepada Lindelof. Lindelof mengatakan bahwa: *Andaikan* $f(z) \prec F(z)$ *dalam unit disk* U. *Maka untuk setiap* $r \in [0,\ 1]$, $\quad f(U_r) \subset F(U_r)$.

Teori subordinasi banyak dilibatkan dalam penelitian masalah matematika murni seperti analisis kompleks dan analisis riil. Hanya saat ini subordinasi menjadi sangat penting dalam teori fungsi univalen. Pada tahun 1974 Eenigenburg dan kawan-kawan pertamakali melihat penggunaan teori subordinasi saat melakukan penelitian mengkaji sifat fungsi Bazilevic. Sehingga dari peneliti Eenigenburg dan kawan-kawan tersebut teori subordinasi sering digunakan oleh peneliti-peneliti selanjutnya. Konsep subordinasi yang digunakan oleh peneliti Eenigenburg dan kawan-kawan tersebut adalah konsep sunordinasi yang diperkenalkan oleh Miller dan Mocanu (1981) ang menyatakan; *Untuk dua fungsi analisis* f *dan* g *dalam unit disk* $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, *fungsi* f *dikatakan subordinat bagi* g *dalam* U, *ditulis* $f(z) \prec g(z)$ *atau* $f \prec g\ (z) \in U$, *jika* *terdapat fungsi analisi Schwarz* $w(z)$ *dalam* U *dengan* $w(0) = 0$ *dan* $|w(z)| < 1$ *sedemikian hingga* $f(z) = g\big(w(z)\big)$*. Secara khusus jika fungsi* $g(z)$ *univalen dalam* U*, maka subordinasi tersebut sama halnya dengan mengatakan* $f(0) = g(0)$ *dan* $f(U) \subset g(U)$.

Andaikan F dan G fungsi analisis di dalam *unit disk* U . Fungsi F adalah subordinat kepada G ditulis sebagai $F \prec G$, jika G adalah univalen, $F(0) = G(0)$ dan $F(U) \subset G(U)$. Pada umumnya, diberikan dua fungsi analisis F dan G dalam U maka fungsi F disebut subordinat kepada $G(z)$ dalam U jika terdapat suatu fungsi h yang analisis dalam U dengan

$$h(0) = 0 \text{ dan } |h(z) < 1| \text{ untuk semua } z \in U.$$

sehinggakan

$$F(z) \subset G\big(h(z)\big) \qquad \text{untuk semua } z \in U.$$

Andaikan $\phi: C \to C$ dan h univalen dalam U . Jika p adalah analisis dalam U dan memenuhi turunan subordinasi $\phi\big(p(z), zp'(z)\big) \prec h(z)$, maka p dikatakan penyelesaian pada turunan subordinasi. Fungsi univalen q dikatakan dominan pada penyelesaian turunan subordinasi jika $p \prec q$. Jika p dan $\phi\big(p(z), zp'(z)\big)$ adalah unvalen dalam U dan memenuhi turunan superordinasi $h(z) \prec \phi\big(p(z), zp'(z)\big)$, maka p dikatakan suatu penyelesaian pada turunan superordinasi. Fungsi analisis q dikatakan subordinan pada penyelesaian turunan superordinasi jika $q \prec p$.

Untuk pembuktian teorema utama, maka akan diperlukan Lemma Miller dan Mocanu yaitu:

Lemma 2.1 (Miller dan Mocanu 1981.)

Andaikan ϕ dalah convex univalent dalam U dengan U $\phi(0) = 1$ dan $Re\,\{k\,\phi(z) + v\,\} > 0$ untuk $k, v\, \in C$. Jika p adalah analisis dalam U dengan $p(0) = 1$, maka

$$p(z) + \frac{zp\prime(z)}{k\,p(z)+v} \prec \phi(z), \quad z \in U$$

mengakibatkan $p(z) \prec \phi(z), \quad z \in U$

Lemma 2.2 (Miller dan Mocanu 1981.)

Andaikan ϕ dalah convex univalent dalam U dengan $Re\,\{\omega\} \geq 0$. Jika p adalah analisis dalam U dengan $p(0) = \phi(0)$, maka

$$p(z) + \omega(z)zp'(z) \prec \phi(z)$$

mengakibatkan $p(z) \prec \phi(z), \quad z \in U.$

2.4 Fungsi Starlike dan Convex yang Strongly

Berikut akan diberikan beberapa definisi yang berhubungan dengan fungsi starlike yang strongly, juga diberikan lemma yang sangat berguna untuk membuktikan suatu fungsi tersebut strongly atau tidak.

Defenisi 2.4. Jika $f(z) \in S$ memenuhi $\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - \gamma\right)\right| < \frac{\pi}{2}\beta \quad (z \in U)$ untuk sebarang $\gamma\ (0 \leq \gamma < 1)$ dan $\beta(0 \leq \beta < 1)$, maka $f(z)$ disebut strongly starlike pada order β dan tipe γ di dalam U. Dinotasikan dengan $f(z) \in S^*(\beta, \gamma)$

Definisi 2.5. Jika $f(z) \in S$ memenuhi $\left|\arg\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \gamma\right)\right| < \frac{\pi}{2}\beta \quad (z \in U)$ untuk sebarang $\gamma\ (0 \leq \gamma < 1)$ dan $\beta(0 \leq \beta < 1)$, maka $f(z)$ disebut strongly convex pada order β dan tipe γ di dalam U. Dinotasikan dengan $f(z) \in C(\beta, \gamma)$

Lemma 2.3. Diberikan suatu fungsi $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$, analisis dalam U dan $p(z) \neq 0\ (z \in E)$. Jika terdapat satu titik $(z_0 \in U)$ sedemikian hingga

$|\arg p(z)| < \frac{\pi}{2}\beta\ \ (|z| < |z_0|)$ dan $|\arg p(z_0)| < \frac{\pi}{2}\beta\ \ (0 \leq \beta < 1)$ maka berlaku

$$\frac{z_0\, p'(z_0)}{p(z_0)} = ik\beta$$

dengan

$$k \geq \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \text{ apabila } \arg p(z_0) = \frac{\pi}{2}\beta$$

$$k \leq \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \text{ apabila } \arg p(z_0) = -\frac{\pi}{2}\beta$$

dan $p(z_0)^{1/\beta} = \pm ia \ \ (a > 0)$.

2.5 Operator Integral

Operator integral yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah operator integral yang telah diperkenalkan oleh Choi-Saigo-Srivastava yaitu:

$$I_{\lambda,\mu} f(z) = \left(f_{\lambda,\mu} * f\right)(z), \ \ \lambda > -1, \mu > 0;$$

dengan $\frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}} * f_{\lambda,\mu} = \frac{z}{(1-z)^{\mu}}$ dan

$$I_{\lambda,\mu} f(z) = z_2F_1(\mu, 1, \lambda + 1; z) * f(z)$$

mereka juaga telah membuktikan bahwa

$$z\left[I_{\lambda+1,\mu} f(z)\right]' = (\lambda + 1)\, I_{\lambda,\mu} f(z) - \lambda I_{\lambda+1,\mu} f(z)$$

$$z\left[I_{\lambda,\mu} f(z)\right]' = \mu\, I_{\lambda,\mu+1} f(z) - (\mu - 1) I_{\lambda,\mu} f(z)$$

Penelitian ini selain mengkaji strongly starlikenya dengan melibatkan operator yang diberikan juga menentukan strongly starlike yang sama dengan melibatkan integral Libera, yaitu

$$L_c(f) = L_c(f)(z) = \frac{c+1}{z^c} \int_0^z t^{c-1}\ f(t)\, dt$$

Berdasarkan integral tersebut didapat sebuah persamaan

$$z\left(I_{\lambda,\mu}f(z)\right)L_c(f)(z)' = (c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - cI_{\lambda,\mu}f(z)L_c(f)(z)$$

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian pada penelitian ini adalah studi literatur dengan menggunakan buku-buku, jurnal-jurnal dan makalah-makalah yang relevan dengan penelitian ini dan ada di perpustakaan.

3.1 Langkah – langkah metodologi penelitian

1. Untuk mendapatkan sifat fungsi *starlike* yang *strongly* dengan menggunakan operator integral Choi-Saigo-Srivastava adalah:
   a. Diberikan kelas fungsi *stralike* berbentuk
      $p(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{zf(z))'}{f(z)} - \alpha\right]$
   b. Melibatkan operator choi-saigo-srivastava dan integral libera kedalam kelas yang diberikan, yaitu: $h(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z(I_{\lambda+1,\mu}f(z))'}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)} - \alpha\right]$
   c. Menggunakan persamaan operator yang telah ada kedalam kelas yang diberikan
   d. Menggunakan aturan turunan logaritma pada persamaan yang didapatkan
   e. Mengalikan persamaan dengan z
   f. Menggunakan Lemma 2.3
   g. Mendapatkan fungsi *starlike* yang *strongly*

2. Untuk mendapatkan sifat fungsi *starlike* yang *strongly* dengan menggunakan operator integral Libera adalah:
   a. Diberikan kelas fungsi *stralike* berbentuk

      $p(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{zf(z))\prime}{f(z)} - \alpha\right]$

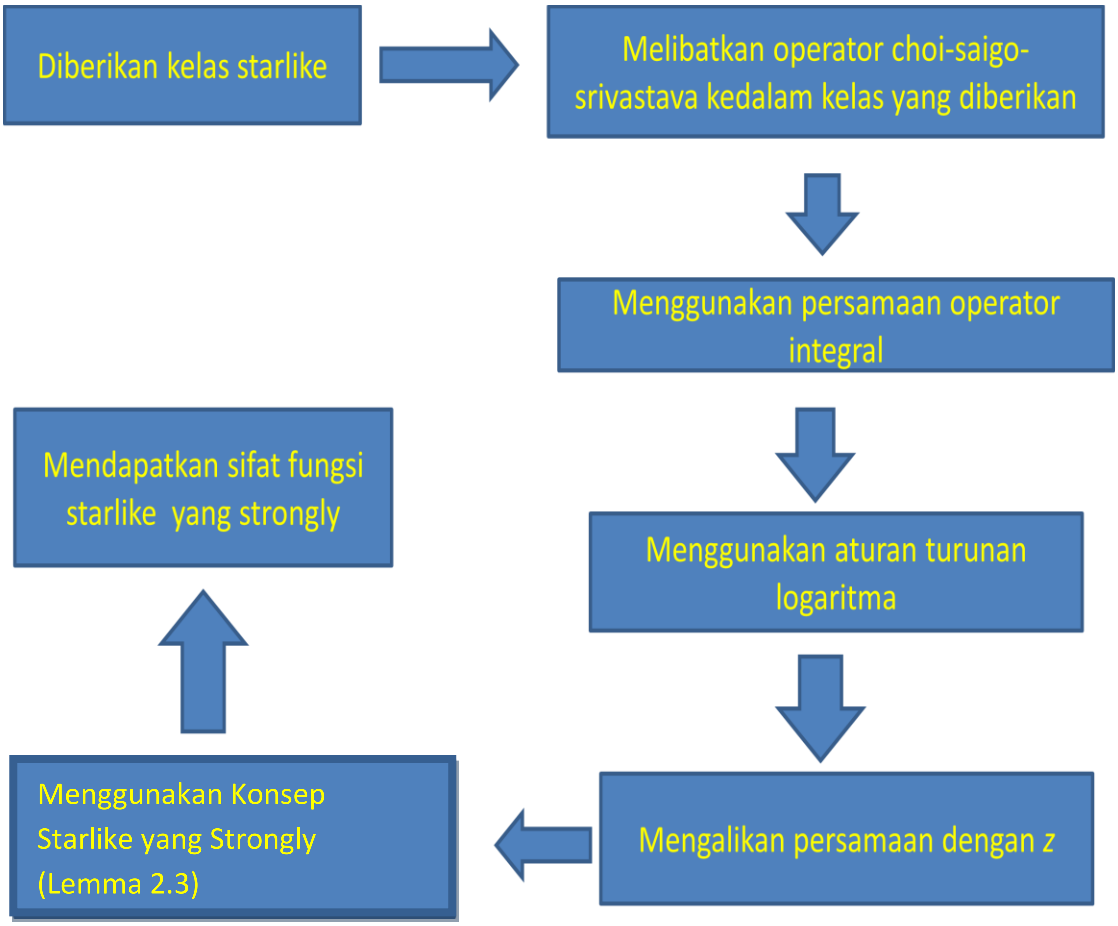
   b. Melibatkan operator integral Libera kedalam kelas yang diberikan, yaitu: $p(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z(I_{\lambda+1,\mu}f(z))\prime}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)} - \alpha\right]$ dan

      $p(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}\, L_c f(z))\prime}{I_{\lambda,\mu}\; L_c f(z)} - \alpha\right]$

   c. Menggunakan persamaan operator yang telah ada kedalam kelas yang diberikan
   d. Menggunakan aturan turunan logaritma pada persamaan yang didapatkan
   e. Mengalikan persamaan dengan *z*
   f. Menggunakan Lemma 2.3
   g. Mendapatkan sifat fungsi *starlike* yang *strongly*

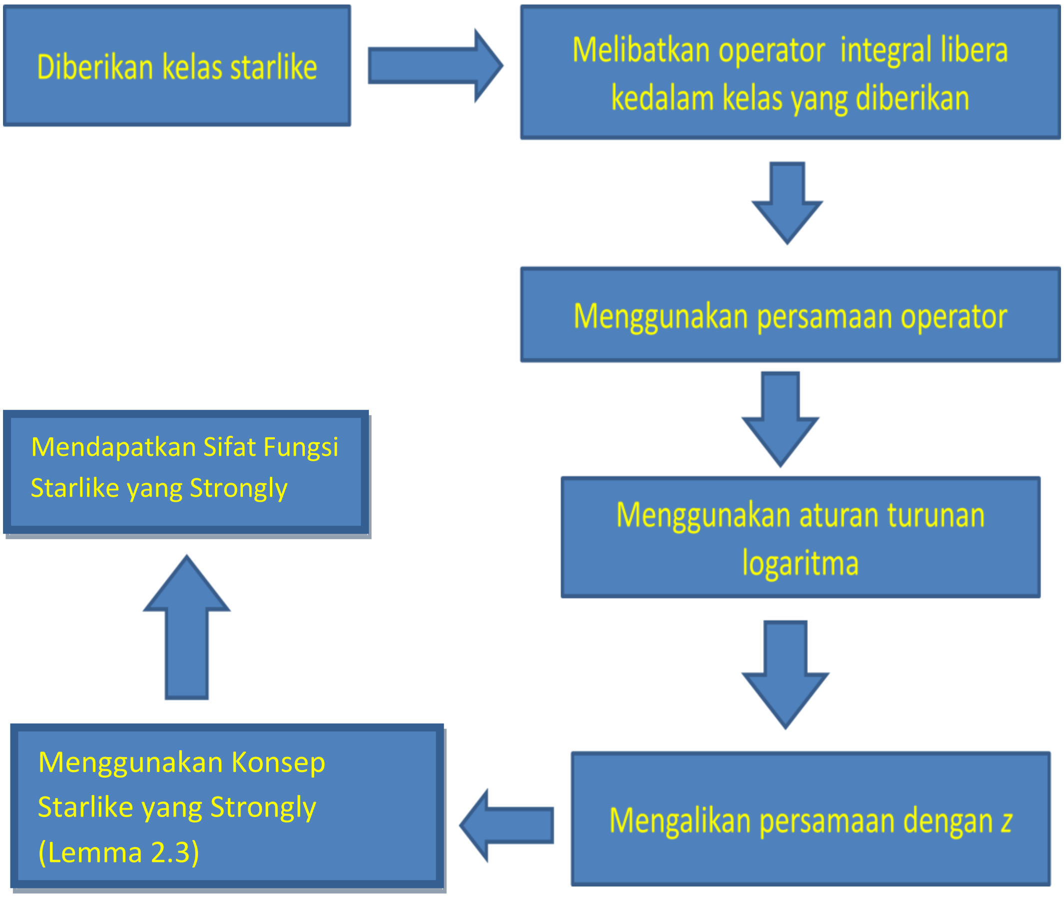
3. Untuk mendapatkan sifat fungsi *convex* yang *strongly*
   a. Menggunakan definisi kelas *convex*
   b. Menggunakan hubungan *convex* dan *starlike* yaitu $f(z) \in C^*(\alpha;\phi) \leftrightarrow zf(z) \in S^*(\alpha;\phi)$
   c. Melibatkan operator choi-saigo-srivastava dan operatorLibera
   d. Menggunakan sifat fungsi *starlike* yang *strongly*
   e. Mendapatkan sifat subkleas fungsi *convex* yang *strongly*

3.2 Metodologi Penelitian Fungsi Starlike yang Strongly dengan melibatkan operator integral Choi-Saigo-Srivastava



Gambar 3.1 *Flowchart* Fungsi Starlike yang strongly Menggunakan operator integral Choi-Saigo-Srivastava

3.3 **Metodologi Penelitian Fungsi Starlike yang Strongly dengan melibatkan operator integral Libera**



Gambar 3.2 *Flowchart* Fungsi Starlike yang Strongly Melibatkan operator integral Libera

3.4 Metodologi Penelitian Fungsi Convex yang starlike dengan melibatkan operator integral Choi-Saigo-Srivastava dan operator integral Libera

Gambar 3.2 *Flowchart* Fungsi Convex yang Strongly

BAB IV

FUNGSI STARLIKE YANG STRONGLY MENGGUNAKAN OPERATOR INTEGRAL CHOI-SAIGO-SRIVASTAVA

4.1 Subkelas Fungsi Univalen

Andaikan N kelas semua fungsiϕ yang analisis dan univalen dalam U untuk $\phi(U)$ adalah *convex* dengan $\phi(0)$ dan $Re\{\phi\} > 0$ untuk $z \in U$. Dengan menggunakan prinsip dasar pada subordinasi antara fungsi univalen diperkenalkan subkelas $S^*\ (\alpha;\phi)$, $C^*\ (\alpha;\phi)$ dan $Q^*\ (\alpha,\beta;\phi,\psi)$ pada kelas S untuk $\alpha \geq 0$ dan $\phi \in N$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S^*\ (\alpha;\phi) = \left\{ f \in S\colon \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{zf(z))'}{f(z)} - \alpha\right] \prec \phi(z), \qquad z \in U \right\}$$

$$C^*\ (\alpha;\phi) = \left\{ f \in S\colon \frac{1}{1-\alpha}\left[1 + \frac{zf(z))'}{f(z)} - \alpha\right] \prec \phi(z), \qquad z \in U \right\}$$

dan

$$Q^*(\alpha,\beta;\phi,\psi) = \left\{ f \in S; \exists g \in S^*\ (\alpha;\phi) \ni \frac{1}{1-\beta}\left[1 + \frac{zf(z))'}{g(z)} - \beta\right] \prec \psi(z), \right\}$$

Seterusnya dengan menggunakan operator integral choi-saigo-srivastava $I_{\lambda,\mu}f(z)$ diperkenalkan kelas pada fungsi univalen, yaitu:

$$S^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha;\phi) = \{f \in S, I_{\lambda,\mu}f(z) \in S^*\ (\alpha;\phi)\}$$

$$C^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha;\phi) = \{f \in S, I_{\lambda,\mu}f(z) \in C^*\ (\alpha;\phi)\}$$

dan

$$Q^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha,\beta;\phi,\psi) = \{f \in S, I_{\lambda,\mu}f(z) \in Q^*(\alpha,\beta;\phi,\psi)\}$$

dengan catatan bahwa $f(z) \in C^*\ (\alpha;\phi) \leftrightarrow zf'z \in S^*\ (\alpha;\phi)$ ... ... (4.1)

Di dalam bab ini akan diperlihatkan sifat-sifat pada subkelas $S^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha;\phi)$ yang strongly dan $C^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha;\phi)$ yang strongly yang melibatkan operator integral yang sudah diberikan.

4.2 Sifat Subkelas $S^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha;\phi)$

Teorema 4.1: Diberikan $f \in S$ dan $\alpha \geq 0, \phi \in N$, misalkan $\lambda \geq 0, \mu \geq 1$ maka berlaku $S^*_{\lambda,\mu+1}\ (\alpha;\phi) \subset S^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha;\phi) \subset S^*_{\lambda+1,\mu}\ (\alpha;\phi)$.

Bukti:

Pertama kita akan tunjukkan $S^*_{\lambda,\mu+1}\ (\alpha;\phi) \subset S^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha;\phi)$.

Diberikan $f \in S^*_{\lambda,\mu+1}\ (\alpha;\phi)$ dan diberikan himpunan

$$h(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - \alpha\right]$$

dengan $h(z) = 1 + c_1\, z + \ c_2\, z^2 + c_3\, z^3 + \cdots$ adalah fungsi analitik di dalam U dengan $h(0) = 1$. Dengan menggunakan persamaan operator integral (2.5) maka himpunan $h(z)$ berubah menjadi:

$$h(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - \alpha\right]$$

$$(1-\alpha)h(z) + \alpha\ = \left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .. (4.2)$$

$$(1-\alpha)h(z) + \alpha\ = \left[\frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z) - (\mu-1)\, I_{\lambda,\mu}\, f(z)}{I_{\lambda,\mu}f(z)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.3)$$

$$(1-\alpha)h(z) + \alpha\ = \left[\frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - (\mu-1)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.4)$$

$$(1-\alpha)h(z) + \alpha + (\mu-1)\ = \left[\frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)}{I_{\lambda,\mu}f(z)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.5)$$

Dengan menggunakan aturan turunan logaritma pada kedua sisi persamaan di atas maka diperoleh :

$$\frac{1}{(1-\alpha)h(z) + (\mu-1)}(1-\alpha)h'(z)$$

$$= \frac{I_{\lambda,\mu}f(z)}{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)}$$

$$\cdot \left\{\frac{\mu\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)' I_{\lambda,\mu}f(z) - \mu I_{\lambda,\mu}\, f(z)\, (I_{\lambda,\mu}f(z))'}{\left[I_{\lambda,\mu}f(z)\right]^2}\right\}$$

$$\frac{(1-\alpha)\,h'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+(\mu-1)} = \frac{\left(I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)} - \frac{(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.6)$$

Persamaan (4.6) d atas dikali dengan z, sehingga persamaan menjadi:

$$\frac{(1-\alpha)\,zh'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+(\mu-1)} = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)} - \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}f(z)}$$

selanjutnya dengan mensubstitusi persamaan operator integral (2.5) ke persamaan di atas maka diperoleh:

$$\frac{(1-\alpha)\,zh'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+(\mu-1)}$$

$$= \frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)} - \left[\frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)-(\mu-1)\,I_{\lambda,\mu}\,f(z)}{I_{\lambda,\mu}f(z)}\right]$$

$$\frac{(1-\alpha)\,zh'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+(\mu-1)}$$

$$= \frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)} - \left[\frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - (\mu-1)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.7)$$

Berdasarkan persamaan (4.5) maka persamaan di atas menjadi:

$$\frac{(1-\alpha)\,zh'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+(\mu-1)}$$

$$= \frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)} - [(1-\alpha)h(z)+\mu+(\mu-1)-(\mu-1)]$$

$$\frac{(1-\alpha)\,zh'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+(\mu-1)} = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)} - [(1-\alpha)h(z)+\mu]$$

$$\frac{(1-\alpha)\, zh'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+(\mu-1)} + (1-\alpha)h(z) = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)} - \mu$$

$$(1-\alpha)\left[\frac{z\, h'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+(\mu-1)} + p(z)\right] = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)} - \mu$$

$$\left[\frac{z\, h'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+(\mu-1)} + h(z)\right] = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)} - \mu \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.8)$$

Dengan menggunakan Lemma (2.1) maka persamaan di atas menunjukkan bahwasannya $p \prec \phi$ artinya $f \in S^*_{\lambda,\mu}\,(\alpha;\phi)$

Selanjutnya akan ditunjukan $S^*_{\lambda,\mu}\,(\alpha;\phi) \subset S^*_{\lambda+1,\mu}\,(\alpha;\phi)$

Diberikan $f \in S^*_{\lambda,\mu}\,(\alpha;\phi)$ dan diberikan himpunan

$$p(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z(I_{\lambda+1,\mu} f(z))'}{I_{\lambda+1,\mu} f(z)} - \alpha\right]$$

dengan $p(z) = 1 + c_1\, z + c_2\, z^2 + c_3\, z^3 + \cdots$ adalah fungsi analitik di dalam U dengan $p(0) = 1$. Dengan menggunakan persamaan operator integral (2.5) maka himpunan $p(z)$ berubah menjadi:

$$p(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z(I_{\lambda+1,\mu} f(z))'}{I_{\lambda+1,\mu} f(z)} - \alpha\right]$$

$$(1-\alpha)p(z) + \alpha = \left[\frac{z(I_{\lambda+1,\mu} f(z))'}{I_{\lambda+1,\mu} f(z)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .. (4.9)$$

$$(1-\alpha)p(z)+\alpha \ = \left[\frac{(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\, f(z)-\lambda\, I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (4.10)$$

$$(1-\alpha)p(z)+\alpha \ = \left[\frac{(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\, f(z)}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)}-\lambda\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.11)$$

$$(1-\alpha)p(z)+\alpha+\lambda \ = \left[\frac{(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\, f(z)}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.12)$$

Dengan menggunakan aturan turunan logaritma pada kedua sisi persamaan di atas maka diperoleh :

$$\frac{1}{(1-\alpha)p(z)+\alpha+\lambda}(1-\alpha)p'(z)$$

$$=\frac{I_{\lambda+1,\mu}f(z)}{(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\, f(z)}$$

$$\cdot\left\{\frac{(\lambda+1)\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)' I_{\lambda+1,\mu}f(z)-(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\, f(z)\, (I_{\lambda+1,\mu}f(z))'}{\left[I_{\lambda+1,\mu}f(z)\right]^2}\right\}$$

$$\frac{(1-\alpha)\, p'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\Box+\lambda}=\frac{\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, f(z)}-\frac{(I_{\lambda+1,\mu}f(z))'}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.13)$$

Persamaan (4.13) d atas dikali dengan *z*, sehingga persamaan menjadi:

$$\frac{(1-\alpha)\, zp'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\alpha+\lambda}=\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, f(z)}-\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)}$$

selanjutnya dengan mensubstitusi persamaan operator integral (2.5) ke persamaan di atas maka diperoleh:

$$\frac{(1-\alpha)\,zp'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\alpha+\lambda} = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,f(z)} - \frac{(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\,f(z) - \lambda\,I_{\lambda+1,\mu}\,f(z)}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)}$$

$$\frac{(1-\alpha)\,zp'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\alpha+\lambda} = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,f(z)} - \left[\frac{(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\,f(z)}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)} - \lambda\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (4.14)$$

Berdasarkan persamaan (4.11) maka persamaan di atas menjadi:

$$\frac{(1-\alpha)\,zp'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\alpha+\lambda} = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,f(z)} - [(1-\alpha)p(z)+\alpha]$$

$$\frac{(1-\alpha)\,zp'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\alpha+\lambda} + (1-\alpha)p(z) = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,f(z)} - \lambda$$

$$(1-\alpha)\left[\frac{z\,p'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\alpha+\lambda} + p(z)\right] = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,f(z)} - \lambda$$

$$\left[\frac{z\,p'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\alpha+\lambda} + p(z)\right] = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,f(z)} - \lambda \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.15)$$

Dengan menggunakan Lemma (2.1) maka persamaan di atas menunjukkan bahwasannya $p \prec \phi$ artinya $f \in S^{*}_{\lambda,\mu+1}(\alpha;\phi)$.

4.3 Sifat Fungsi Starlike yang Strongly

Teorema 4.2: Diberikan $f \in S$ dan $\alpha \geq 0, \phi \in N$, misalkan $\lambda \geq 0, \mu \geq 1$ maka berlaku $s^{*}_{\lambda,\mu+1}(\alpha;\phi) \subset s^{*}_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi) \subset s^{*}_{\lambda+1,\mu}(\alpha;\phi)$.

Bukti:

Pertama kita akan tunjukan $s^*_{\lambda,\mu+1}(\alpha;\phi) \subset s^*_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi)$

Diberikan $f \in S^*_{\lambda,\mu+1}(\alpha;\phi)$ dan diberikan himpunan

$$h(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - \alpha\right]$$

dengan $h(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$ adalah fungsi analitik di dalam U dengan $h(0) = 1$. Dengan menggunakan persamaan operator integral pada bagian (2.5) maka himpunan $h(z)$ berubah menjadi:

$$h(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - \alpha\right]$$

$$(1-\alpha)h(z) + \alpha = \left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (4.16)$$

$$(1-\alpha)h(z) + \alpha = \left[\frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z) - (\mu-1)\, I_{\lambda,\mu}\, f(z)}{I_{\lambda,\mu}f(z)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.17)$$

$$(1-\alpha)h(z) + \alpha = \left[\frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - (\mu-1)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.18)$$

$$(1-\alpha)h(z) + \alpha + (\mu-1) = \left[\frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)}{I_{\lambda,\mu}f(z)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.19)$$

Dengan menggunakan aturan turunan logaritma pada kedua sisi persamaan di atas maka diperoleh :

$$\frac{1}{(1-\alpha)h(z)+(\mu-1)}(1-\alpha)h'(z)$$

$$=\frac{I_{\lambda,\mu}f(z)}{\mu I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)}$$

$$\cdot\left\{\frac{\mu\left(I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)\right)'I_{\lambda,\mu}f(z)-\mu I_{\lambda,\mu}\,f(z)\,(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{\left[I_{\lambda,\mu}f(z)\right]^2}\right\}$$

$$\frac{(1-\alpha)\,h(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+(\mu-1)}=\frac{\left(I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)}-\frac{(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.20)$$

Persamaan (4.20) d atas dikali dengan z, sehingga persamaan menjadi:

$$\frac{(1-\alpha)\,zh'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+(\mu-1)}=\frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)}-\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}f(z)}$$

selanjutnya dengan mensubstitusi persamaan operator integral ke persamaan di atas maka diperoleh:

$$\frac{(1-\alpha)\,zh'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+(\mu-1)}$$

$$=\frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)}-\left[\frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)-(\mu-1)\,I_{\lambda,\mu}\,f(z)}{I_{\lambda,\mu}f(z)}\right]$$

$$\frac{(1-\alpha)\,zh'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+(\mu-1)}$$

$$=\frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)}-\left[\frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)}{I_{\lambda,\mu}f(z)}-(\mu-1)\right]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.21)$$

Berdasarkan persamaan (4.19) maka persamaan di atas menjadi:

$$\frac{(1-\alpha)\, zh'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+(\mu-1)}$$

$$= \frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)} - [(1-\alpha)h(z)+\mu+(\mu-1)-(\mu-1)]$$

$$\frac{(1-\alpha)\, zh'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+(\mu-1)} = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)} - [(1-\alpha)h(z)+\mu]$$

$$\frac{(1-\alpha)\, zh'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+(\mu-1)} + (1-\alpha)h(z) = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)} - \mu \ldots\ldots..(4.22)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $s^*_{\lambda,\mu+1}(\alpha;\phi) \subset s^*_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi)$ adalah fungsi starlike yang strongly . Andaikan terdapat titik $z_0 \in U$ sedemikian hingga $|\arg h(z)| < \frac{\pi}{2}\rho(|z| < |z_0|)$, $|\arg h(z_0)| = \frac{\pi}{2}\rho$ maka dengan menggunakan Lemma 2.3 kita dapat menulis bahwa $\frac{z_0 h'(z_0)}{h(z_0)} = ik\rho$ dan $h(z_0)^{\frac{i}{\rho}} = \pm a(a > 0)$ untuk arg $h(z_0) = \frac{-\pi}{2}\rho$ dan arg $h(z_0) = \frac{\pi}{2}\rho$.

1. Jika $\arg h(z_0) = \frac{-\pi}{2}\rho$ maka:

$$\frac{z(I_{\lambda,\mu+1}f(z))'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)} - \alpha = (1-\alpha)h(z) + \frac{(1-\alpha)h(z)z_0h'(z_0)}{(1-\alpha)h(z_0)+(\alpha+\mu-1)}$$

dan

$$\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z_0)} - \alpha = (1-\alpha)h(z_0) + \frac{(1-\alpha)h(z)\ \frac{z_0h'(z_0)}{h(z_0)}}{(1-\alpha)h(z_0)+(\alpha+\mu-1)}$$

$$= (1 - \alpha)h(z_0)\left\{\frac{1+\frac{z_0 h'(z_0)}{h(z_0)}}{(1-\alpha)h(z_0)+(\alpha+\mu-1)}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(4.23)$$

dengan mensubstitusi nilai $h(z_0)$ maka diperoleh persamaan

$$\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z_0)} - \mu = (1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}\left(1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha+\mu-1)}\right)$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai argument

$$\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z_0)} - \alpha\right\}$$

$$= \arg\left\{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}\left(1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha+\mu-1)}\right)\right\}$$

$$= \arg\left\{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}\right\} + \arg\left\{1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha+\mu-1)}\right\}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\rho + \arg\left\{1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\mu-1)}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.24)$$

Untuk menentukan $\arg\left\{1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\mu-1)}\right\}$ maka kita akan lakukan proses sebagai berikut:

Misalkan $z = \left\{1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\mu-1)}\right\}$

$$z = \left\{ \frac{(1-\alpha)a^{\rho} e^{-i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha + \mu - 1) + ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho} e^{-i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha + \mu - 1)} \right\}$$

$$z = \left\{ \frac{(1-\alpha)a^{\rho}[\cos\frac{\pi}{2}\rho - i\sin\frac{\pi}{2}\rho] + (\alpha + \mu - 1) + ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}[\cos\frac{\pi}{2}\rho - i\sin\frac{\pi}{2}\rho] + (\alpha + \mu - 1)} \right\}$$

$$z = \frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + \mu - 1)\right) + i\,\left(k\rho - (1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + \mu - 1)\right) - i\,\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}$$

Maka selanjutnya:

$$z = \left\{ \frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + \mu - 1)\right) + i\,\left(k\rho - (1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + \mu - 1)\right) - i\,\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)} \right\}$$

$$\times \left\{ \frac{\left((1-\alpha)\alpha^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + \mu - 1)\right) + i\,\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)\alpha^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + \mu - 1)\right) + i\,\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)} \right\}$$

$$z = \left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + \mu - 1)\right)^{2}$$

$$+ \left\{ \left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + \mu - 1)\right)\right.$$

$$\left.\times\ i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)\right\} + \left\{ i\,\left(k\rho - (1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)\right.$$

$$\left.\times\,\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + \mu - 1)\right)\right\} + \left\{ i^{2}\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)\right.$$

$$\times \left(k\rho - (1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)\Big\}$$

$$\times \left\{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu-1)\right)^2 - i^2\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2\right\}$$

Dan akhirnya di dapat z yang sederhana yaitu:

$$z = \left((1-\alpha)\alpha^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu-1)\right)^2$$

$$-\left(\left((1-\alpha)a\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)\left(k\rho - (1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)\right)$$

$$\frac{+i\left((1-\alpha)a\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu-1)\right)\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho + k\rho - (1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu-1)\right)^2 - i^2\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2}$$

$$z = \left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu-1)\right)^2 - k\rho(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho$$

$$+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2$$

$$\frac{+ik\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu-1)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu-1)\right)^2 - i^2\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2}$$

Berdasarkan bilangan z di atas, maka di dapat nilai x dan y yaitu:

$$x = \frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu-1)\right)^2 + \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2 - k\rho(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu-1)\right)^2 - i^2\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2}$$

dan

$$y = \frac{k\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu-1)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu-1)\right)^2 - i^2\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2}$$

Sehingga untuk nilai $\arg z$ yang didapat adalah:

$$\arg z = arc\tan\frac{y}{x}$$

$$= arc\tan\frac{k\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu-1)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu-1)\right)^2 + \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2 - k\rho(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho}$$

$$= \tan^{-1}\left(k\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\tfrac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu-1)\right)\right) \times \left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\tfrac{\pi}{2}\rho +\right.$$

$$\left.(\alpha+\mu-1)\right)^2 + \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\tfrac{\pi}{2}\rho\right)^2 - k\rho\,(1-\alpha)a^{\rho}\sin\tfrac{\pi}{2}\rho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.25)$$

Maka persamaan 4.24 dapat dilanjutkan untuk menentukan $\arg z$ nya dengan menggunakan persamaan 4.25, yaitu:

$$\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\,f(z_0)} - \alpha\right\}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\rho + \arg\left\{1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha+\mu-1)}\right\}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\rho$$

$$+ \tan^{-1}\frac{k\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu-1)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\square-1)\right)^2 + \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2 - k\rho(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho}$$

$$\leq -\frac{\pi}{2}\rho$$

Dengan $k \leq \left(\frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) \leq -1, \quad \alpha + \beta \geq -\gamma$ hal ini kontradiksi dengan $f(z) \in s^{*}_{\lambda,\mu+1}(\alpha;\phi)$. Berdasarkan hasil arg $h(z_0) = \frac{-\pi}{2}\rho$ maka diperoleh $\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z_0)} - \alpha\right\} \leq \frac{\pi}{2}\rho$.

2. Jika $\arg h(z_0) = \frac{\pi}{2}\rho$ maka:

$$\frac{z(I_{\lambda,\mu+1}f(z))'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)} - \alpha = (1-a)\, h(z_0) + \frac{(1-a)z_0 h'(z_0)}{(1-a)h(z_0) + (\alpha+\mu+1)}$$

$$= (1-a)\, h(z_0) + \left(1 + \frac{z_0 h'(z_0)}{(1-a)h(z_0) + (\alpha+\mu+1)}\right)$$

$$= (1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}\left(1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha+\mu+1)}\right)$$

Selanjutnya:

$$\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z_0)} - \alpha\right\}$$

$$= \arg\left\{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}\left(1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\mu+1)}\right)\right\}$$

$$= \arg\left\{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}\right\}+\arg\left\{1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\mu+1)}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\rho+\arg\left\{1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\mu+1)}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.26)$$

Untuk menentukan arg $\left\{1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\mu+1)}\right\}$

Maka kita akan lakukan proses sebagai berikut:

Misalkan:

$$z = \left\{1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\mu+1)}\right\}$$

$$z = \frac{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}+\ (\alpha+\mu+1)+ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\mu+1)}$$

$$= \frac{(1-\alpha)a^{\rho}\left[\cos\frac{\pi}{2}\rho+i\sin\frac{\pi}{2}\rho\right]+(\alpha+\mu+1)+ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}\left[\cos\frac{\pi}{2}\rho+i\sin\frac{\pi}{2}\rho\right]+(\alpha+\mu+1)}$$

$$= \frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\mu+1)\right)\ +i\ \left(k\rho+(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\mu+1)\right)\ +i\ \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}$$

Maka selanjutnya:

$$z=\left\{\frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\mu+1)\right)+i\left(k\rho+(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\mu+1)\right)+i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}\right\}$$

$$\times\left\{\frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\mu+1)\right)-i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\mu+1)\right)-i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}\right\}$$

Dengan sedikit kalkulasi sehingga didapat z dengan bentuk yang sederhana, yaitu:

$$z=\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\mu+1)\right)^{2}+k\rho a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho$$

$$+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^{2}$$

$$+\frac{ik\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\mu+1)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\mu+1)\right)^{2}+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^{2}}$$

Berdasarkan bilangan z di atas,maka didapat nilai x dan y yatu:

$$x$$

$$=\frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\mu+1)\right)^{2}+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^{2}+\square\rho a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\mu+1)\right)^{2}+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^{2}}$$

dan

$$y=\frac{ik\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\mu+1)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\mu+1)\right)^{2}+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^{2}}$$

Sehingga untuk nilai $\arg(z)$ yang didapat adalah:

$$\arg z = arc \tan \frac{y}{x}$$

$$= arc \tan \frac{ik\rho \ \left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu+1)\right)}{\left((1-\alpha)a\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu+1)\right)^2 + \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2 + k\rho a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho}$$

$$= \tan^{-1}\left(k\rho\ (1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu+1)\right)$$

$$\times \left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\tfrac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu+1)\right)^2 + \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\tfrac{\pi}{2}\rho\right)^2 +$$

$$k\rho a^{\rho}\sin\tfrac{\pi}{2}\rho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (4.27)$$

Maka persamaan 4.26 dapat dilanjutkan untuk menentukan $\arg z$ nya dengan melihat persamaan 4.27 yaitu:

$$\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\ f(z_0)} - \alpha\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\rho + \arg\left\{1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha+\mu+1)}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\rho$$

$$+ \tan^{-1}\frac{\left(k\rho\ (1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu+1)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu+1)\right)^2 + \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2 + k\rho a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho}$$

$$\geq \frac{\pi}{2}\rho$$

Hal ini juga mengakibatkan kontradiksi terhadap $f \in s^*_{\lambda,\mu+1}(\alpha;\phi)$. Berdasarkan hasil arg $h(z_0) = \frac{\pi}{2}\rho$ maka diperoleh $\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\,f(z_0)} - \alpha\right\} \geq \frac{\pi}{2}\rho$. Berdasarkan kedua hasil yang diperoleh,

sehingga fungsi $h(z)$ hanya memenuhi untuk nilai $|\arg z| < \frac{\pi}{2}\rho \quad (z \in U)$, artinya

$$\left|\arg\left\{\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - \alpha\right\}\right| < \frac{\pi}{2}\rho, \quad (z \in U)$$

Selanjutnya akan dibuktikan untuk $s^*_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi) \subset s^*_{\lambda+1,\mu}(\alpha;\phi)$ adalah fungsi starlike yang strongly. Diberikan himpunan

$$h(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z(I_{\lambda+1,\mu}f(z))'}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)} - \alpha\right]$$

dengan $h(z) = 1 + c_1\, z + c_2\, z^2 + c_3\, z^3 + \cdots$ adalah fungsi analitik di dalam U dengan $h(0) = 1$. Dengan menggunakan persamaan operator pada bagian (2.5) maka himpunan $h(z)$ berubah menjadi:

$$h(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z(I_{\lambda+1,\mu}f(z))'}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)} - \alpha\right]$$

$$(1-\alpha)h(z) + \alpha = \left[\frac{z(I_{\lambda+1,\mu}f(z))'}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (4.28)$$

$$(1-\alpha)h(z) + \alpha = \left[\frac{(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\, f(z) - \lambda\, I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (4.29)$$

$$(1-\alpha)h(z)+\alpha \ = \left[\frac{(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\,f(z)}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)}-\lambda\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.30)$$

$$(1-\alpha)h(z)+\alpha+\lambda \ = \left[\frac{(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\,f(z)}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.31)$$

Dengan menggunakan aturan turunan logaritma pada kedua sisi persamaan di atas maka diperoleh :

$$\frac{1}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+\lambda}(1-\alpha)h'(z)$$

$$=\frac{I_{\lambda+1,\mu}f(z)}{(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\,f(z)}$$

$$\cdot\left\{\frac{(\lambda+1)\left(I_{\lambda,\mu}\,f(z)\right)'I_{\lambda+1,\mu}f(z)-(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\,f(z)\,(I_{\lambda+1,\mu}f(z))'}{\left[I_{\lambda+1,\mu}f(z)\right]^2}\right\}$$

$$\frac{(1-\alpha)\,h'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+\lambda}=\frac{\left(I_{\lambda,\mu}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,f(z)}-\frac{(I_{\lambda+1,\mu}f(z))'}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.32)$$

Persamaan (4.32) d atas dikali dengan *z*, sehingga persamaan menjadi:

$$\frac{(1-\alpha)\,zh'(z)}{(1-\alpha)h(\square)+\alpha+\lambda}=\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,f(z)}-\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)}$$

selanjutnya dengan mensubstitusi persamaan operator integral ke persamaan di atas maka diperoleh:

$$\frac{(1-\alpha)\, zh'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+\lambda} = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, f(z)} - \frac{(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\, f(z) - \lambda\, I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)}{I_{\lambda+1,\mu} f(z)}$$

$$\frac{(1-\alpha)\, zh'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+\lambda} = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, f(z)} - \left[\frac{(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\, f(z)}{I_{\lambda+1,\mu} f(z)} - \lambda\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (4.32)$$

Berdasarkan persamaan (4.30) maka persamaan di atas menjadi:

$$\frac{(1-\alpha)\, zh'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+\lambda} = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, f(z)} - [(1-\alpha)h(z)+\alpha]$$

$$\frac{(1-\alpha)\, zh'(z)}{(1-\alpha)h(z)+\alpha+\lambda} + (1-\alpha)h(z) = \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, f(z)} - \lambda \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .. (4.34)$$

Andaikan terdapat titik $z_0 \in U$ sedemikian hingga $|\arg h(z)| < \frac{\pi}{2}\rho(|z| < |z_0|)$, $|\arg h(z_0)| = \frac{\pi}{2}\rho$ maka dengan menggunakan Lemma 2.3 kita dapat menulis bahwa $\frac{z_0 h'(z_0)}{h(z_0)} = ik\rho$ dan $h(z_0)^{\frac{i}{\rho}} = \pm a (a > 0)$ untuk arg $h(z_0) = \frac{-\pi}{2}\rho$ dan arg $h(z_0) = \frac{\pi}{2}\rho$.

1. Jika $\arg h(z_0) = \frac{-\pi}{2}\rho$ maka:

$$\frac{z(I_{\lambda,\mu} f(z))'}{I_{\lambda,\mu}\, f(z)} - \lambda = (1-\alpha)h(z) + \frac{(1-\alpha)h(z)z_0 h'(z_0)}{(1-\alpha)h(z_0)+(\alpha+\lambda)}$$

dan

$$\frac{z_0(I_{\lambda,\mu}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu}\,f(z_0)}-\lambda\;=(1-\alpha)h(z_0)+\frac{(1-\alpha)h(z)\;\frac{z_0h'(z_0)}{h(z_0)}}{(1-\alpha)h(z_0)+(\alpha+\lambda)}$$

$$=(1-\alpha)h(z_0)\left\{\frac{1+\frac{z_0h'(z_0)}{h(z_0)}}{(1-\alpha)h(z_0)+(\alpha+\lambda)}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.35)$$

dengan mensubstitusi nilai $h(z_0)$ maka diperoleh persamaan

$$\frac{z_0(I_{\lambda,\mu}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu}\,f(z_0)}-\lambda=(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}\left(1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\lambda)}\right)$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai argument

$$\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu}\,f(z_0)}-\lambda\right\}$$

$$=\arg\left\{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}\left(1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\lambda)}\right)\right\}$$

$$=\arg\left\{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}\right\}+\arg\left\{1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\lambda)}\right\}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\rho+\arg\left\{1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\lambda)}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.36)$$

Untuk menentukan $\arg\left\{1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\lambda)}\right\}$ maka kita akan lakukan proses sebagai berikut:

Misalkan $z=\left\{1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\lambda)}\right\}$

$$z = \left\{ \frac{(1-\alpha)a^{\rho} e^{-i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha+\lambda) + ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho} e^{-i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha+\lambda)} \right\}$$

$$z = \left\{ \frac{(1-\alpha)a^{\rho}[\cos\frac{\pi}{2}\rho - i\sin\frac{\pi}{2}\rho] + (\alpha+\lambda) + ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}[\cos\frac{\pi}{2}\rho - i\sin\frac{\pi}{2}\rho] + (\alpha+\lambda)} \right\}$$

$$z = \frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right) + i\ \left(k\rho - (1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right) - i\ \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}$$

Maka selanjutnya:

$$z = \left\{ \frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right) + i\ \left(k\rho - (1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right) - i\ \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)} \right\}$$

$$\times \left\{ \frac{\left((1-\alpha)\alpha^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right) + i\ \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)\alpha^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right) + i\ \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)} \right\}$$

$$z = \left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right)^{2} + \left\{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right)\right.$$

$$\left. \times\ i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)\right\} + \left\{i\ \left(k\rho - (1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)\right.$$

$$\left. \times\ \left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right)\right\} + \left\{i^{2}\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)\right.$$

$$\times\left(k\rho-(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)\Big\}$$

$$\times\left\{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)^{2}-i^{2}\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^{2}\right\}$$

Dan akhirnya di dapat z yang sederhana yaitu:

$$z=\left((1-\alpha)\alpha^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)^{2}$$

$$-\left(\left((1-\alpha)a\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)\left(k\rho-(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)\right)$$

$$\frac{+i\left((1-\alpha)a\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho+k\rho-(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)^{2}-i^{2}\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^{2}}$$

$$z=\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)^{2}-k\rho(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho$$

$$+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^{2}$$

$$\frac{+ik\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)^{2}-i^{2}\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^{2}}$$

Berdasarkan bilangan z di atas, maka di dapat nilai x dan y yaitu:

$$x = \frac{\left((1-\alpha)a^\rho \cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right)^2 + \left((1-\alpha)a^\rho \sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2 - k\rho(1-\alpha)a^\rho \sin\frac{\pi}{2}\rho}{\left((1-\alpha)a^\rho \cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right)^2 - i^2\left((1-\alpha)a^\rho \sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2}$$

dan

$$y = \frac{k\rho\left((1-\alpha)a^\rho \cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right)}{\left((1-\alpha)a^\rho \cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right)^2 - i^2\left((1-\alpha)a^\rho \sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2}$$

Sehingga untuk nilai $\arg z$ yang didapat adalah:

$$\arg z = arc\tan\frac{y}{x}$$

$$= arc\tan\frac{k\rho\left((1-\alpha)a^\rho \cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right)}{\left((1-\alpha)a^\rho \cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right)^2 + \left((1-\alpha)a^\rho \sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2 - k\rho(1-\alpha)a^\rho \sin\frac{\pi}{2}\rho}$$

$$= \tan^{-1}\left(k\rho\left((1-\alpha)a^\rho \cos\tfrac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right)\right) \times \left((1-\alpha)a^\rho \cos\tfrac{\pi}{2}\rho + \right.$$

$$\left.(\alpha+\lambda)\right)^2 + \left((1-\alpha)a^\rho \sin\tfrac{\pi}{2}\rho\right)^2 - k\rho\,(1-\alpha)a^\rho \sin\tfrac{\pi}{2}\rho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.37)$$

Maka persamaan 4.36 dapat dilanjutkan untuk menentukan $\arg z$ nya dengan menggunakan persamaan 4.37, yaitu:

$$\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu}\,f(z_0)} - \lambda\right\}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\rho + \arg\left\{1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha+\lambda)}\right\}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\rho$$

$$+ \tan^{-1}\frac{k\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\lambda)\right)^{2} + \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^{2} - k\rho(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho}$$

$$\leq -\frac{\pi}{2}\rho$$

Dengan $k \leq \left(\frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) \leq -1, \quad \alpha + \beta \geq -\gamma$ hal ini kontradiksi dengan $f(z) \in s^{*}_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi)$. Berdasarkan hasil arg $h(z_0) = \frac{-\pi}{2}\rho$ maka diperoleh $\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu}\,f(z_0)} - \lambda\right\} \leq \frac{\pi}{2}\rho$.

2. Jika $\arg h(z_0) = \frac{\pi}{2}\rho$ maka:

$$\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}\,f(z)} - \lambda = (1-a)\,h(z_0) + \frac{(1-a)z_0h'(z_0)}{(1-a)h(z_0) + (\alpha+\lambda)}$$

$$= (1-a)\,h(z_0) + \left(1 + \frac{z_0h'(z_0)}{(1-a)h(z_0) + (\alpha+\lambda)}\right)$$

$$= (1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}\left(1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha+\lambda)}\right)$$

Selanjutnya:

$$\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu}\,f(z_0)} - \lambda\right\}$$

$$= \arg\left\{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}\left(1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\lambda)}\right)\right\}$$

$$= \arg\left\{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}\right\}+\arg\left\{1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\lambda)}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\rho+\arg\left\{1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\lambda)}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.38)$$

Untuk menentukan $\arg\left\{1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\lambda)}\right\}$

Maka kita akan lakukan proses sebagai berikut:

Misalkan:

$$z = \left\{1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\lambda)}\right\}$$

$$z = \frac{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\lambda)+ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\lambda)}$$

$$= \frac{(1-\alpha)a^{\rho}\left[\cos\frac{\pi}{2}\rho+i\sin\frac{\pi}{2}\rho\right]+(\alpha+\lambda)+ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}\left[\cos\frac{\pi}{2}\rho+i\sin\frac{\pi}{2}\rho\right]+(\alpha+\lambda)}$$

$$= \frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)+i\left(k\rho+(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)+i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}$$

Maka selanjutnya:

$$z=\left\{\frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)+i\left(k\rho+(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)+i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}\right\}$$

$$\times\left\{\frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)-i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)-i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}\right\}$$

Dengan sedikit kalkulasi sehingga didapat z dengan bentuk yang sederhana, yaitu:

$$z=\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)^2+k\rho a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho$$

$$+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2$$

$$+\frac{ik\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)^2+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2}$$

Berdasarkan bilangan z di atas,maka didapat nilai x dan y yatu:

$$x=\frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)^2+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2+k\rho a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)^2+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2}$$

dan

$$y=\frac{ik\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)^2+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2}$$

Sehingga untuk nilai $\arg(z)$ yang didapat adalah:

$$\arg z = arc\tan\frac{y}{x}$$

$$= arc\tan\frac{ik\rho\ \left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)}{\left((1-\alpha)a\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)^{2}+\ \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^{2}+k\rho a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho}$$

$$= \ \tan^{-1}\left(k\rho\ (1-\alpha)a^{\rho}\ \cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)$$

$$\times\ \left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\tfrac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)^{2}+\ \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\tfrac{\pi}{2}\rho\right)^{2}+$$

$$k\rho a^{\rho}\sin\tfrac{\pi}{2}\rho \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.39)$$

Maka persamaan 4.38 dapat dilanjutkan untuk menentukan $\arg z$ nya dengan melihat persamaan 4.39 yaitu:

$$\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu}\ f(z_0)}-\lambda\right\}$$

$$=\ \frac{\pi}{2}\rho+\arg\left\{1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+\lambda)}\right\}$$

$$=\ \frac{\pi}{2}\rho$$

$$+\ \tan^{-1}\frac{\left(k\rho\ (1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+\lambda)\right)^{2}+\ \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^{2}+k\rho a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho}$$

$$\geq\ \frac{\pi}{2}\rho$$

Hal ini juga mengakibatkan kontradiksi terhadap$f \in s^*_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi)$. Berdasarkan hasil arg $h(z_0) = \frac{\pi}{2}\rho$ maka diperoleh $\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu}f(z_0)} - \lambda\right\} \geq \frac{\pi}{2}\rho$. Berdasarkan kedua hasil yang diperoleh,

sehingga fungsi $h(z)$ hanya memenuhi untuk nilai $|\arg z| < \frac{\pi}{2}\rho \quad (z \in U)$, artinya

$$\left|\arg\left\{\frac{z(I_{\square+1,\mu}f(z))'}{I_{\lambda+1,\mu}f(z)} - \alpha\right\}\right| < \frac{\pi}{2}\rho, \quad (z \in U)$$

4.4 Sifat Subkelas Fungsi Convex $C^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha;\phi)$

Teorema 4.3: Diberikan Diberikan $f \in C$ dan $\alpha \geq 0, \phi \in N,$ misalkan $\lambda \geq 0, \mu \geq 1$, maka berlaku $C^*_{\lambda,\mu+1}\ (\alpha;\phi) \subset C^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha;\phi) \subset C^*_{\lambda+1,\mu}\ (\alpha;\phi)$.

Bukti:

Dengan menggunakan persamaan (4.1) yaitu

$f(z) \in C^*\ (\alpha;\phi) \leftrightarrow zf'z \in S^*\ (\alpha;\phi)$ dan teorema 4.1 maka kita peroleh:

$$\begin{aligned} f \in C^*_{\lambda,\mu+1}(\alpha;\phi) &\Leftrightarrow I_{\lambda,\mu+1}\, f(z) \in C^*(\alpha;\phi) \\ &\Leftrightarrow z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)' \in S^*(\alpha;\phi) \\ &\Leftrightarrow I_{\lambda,\mu+1}\left(z\, f(z)\right)' \in S^*(\alpha;\phi) \\ &\Leftrightarrow \left(zf(z)\right)' \in S^*_{\lambda,\mu+1}(\alpha;\phi) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \ \left(zf(z)\right)' \in S^*_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi)$$

$$\Leftrightarrow \ I_{\lambda,\mu} z\, f'(z) \in S^*(\alpha;\phi)$$

$$\Leftrightarrow \ z\left(I_{\lambda,\mu}\, f'(z)\right)' \in S^*(\alpha;\phi)$$

$$\Leftrightarrow \ \left(I_{\lambda,\mu}\, f'(z)\right) \ \ \in C^*(\alpha;\phi)$$

$$\Leftrightarrow f \in C^*_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi).$$

dan

$$f \ \in \ C^*_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi) \ \Leftrightarrow I_{\lambda,\mu}\, f(z) \ \in C^*(\alpha;\phi)$$

$$\Leftrightarrow \ z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)' \ \in S^*(\alpha;\phi)$$

$$\Leftrightarrow I_{\lambda,\mu}\left(z\, f(z)\right)' \ \in S^*(\alpha;\phi)$$

$$\Leftrightarrow \ \left(zf(z)\right)' \ \in S^*_{\lambda,+1,\mu}(\alpha;\phi)$$

$$\Leftrightarrow \ \left(zf(z)\right)' \ \in S^*_{\lambda,+1,\mu}(\alpha;\phi)$$

$$\Leftrightarrow \ I_{\lambda+1,\mu} z\, f'(z) \in S^*(\alpha;\phi)$$

$$\Leftrightarrow \ z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f'(z)\right)' \in S^*(\alpha;\phi)$$

$$\Leftrightarrow \ \left(I_{\square+1,\mu}\, f'(z)\right) \ \ \in C^*(\alpha;\phi)$$

$$\Leftrightarrow f \in C^*_{\lambda+1,\mu}(\alpha;\phi).$$

4.5 Sifat Subkelas Fungsi Close-to-Convex $Q^*_{\lambda,\mu}\,(\alpha,\beta;\phi,\psi)$

Teorema 4.4: Diberikan $f\in Q^*(\alpha,\beta;\phi,\psi)$ maka untuk $\alpha,\beta\geq 0,\quad \phi,\psi\in N$, maka berlaku $Q^*_{\lambda,\mu+1}\,(\alpha,\beta;\phi,\psi)\subset Q^*_{\lambda,\mu}\,(\alpha,\beta;\phi,\psi)\subset Q^*_{\lambda+1,\mu}\,(\alpha,\beta;\phi,\psi)$.

Bukti:

Akan dibuktikan $Q^*_{\lambda,\mu+1}\,(\alpha,\beta;\phi,\psi)\subset Q^*_{\lambda,\mu}\,(\alpha,\beta;\phi,\psi)$. Jika diberikan

$f\in Q^*_{\lambda,\mu+1}\,(\alpha,\beta;\phi,\psi)$ maka terdapat $g\in S^*_{\lambda,,\mu+1}(\alpha;\phi)$ sedemikian hingga.

$$\frac{1}{1-\beta}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\,g(z)}-\beta\right]\prec\psi(z),\quad z\in U$$

Diberikan himpunan $p(z)=\frac{1}{1-\beta}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,g(z)}-\beta\right]$

Dengan $p(z)=1+c_1\,z+\;c_2\,z^2+c_3\,z^3+\cdots$ adalah fungsi analitik di dalam U dan $p(0)=1$. Dengan menggunakan persamaan operator integral (2.5) maka himpunan $p(z)$ berubah menjadi:

$$p(z)=\frac{1}{1-\beta}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,g(z)}-\beta\right]$$

$$(1-\beta)p(z)+\beta=\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,g(z)}\right]$$

$$(1-\beta)p(z)+\beta \ = \left[\frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)-(\mu-1)\, I_{\lambda,\mu}\, f(z)}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.40)$$

Dengan menggunakan aturan turunan logaritma pada kedua sisi persamaan di atas maka diperoleh :

$$\frac{1}{(1-\beta)p(z)+\beta}(1-\beta)p'(z) = \frac{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)-(\mu-1)I_{\lambda,\mu}\, f(z)}$$

$$\cdot\left\{\frac{\left[\left(\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)\prime-\left((\mu-1)I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)\prime\right]\left(I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right)-\left[\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)-(\mu-1)\, I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right]\left(I_{\lambda,\mu}\, g(z)(z)\right)'}{\left[I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right]^2}\right\}$$

selanjutnya

$$\frac{1}{(1-\beta)p(z)+\beta}(1-\beta)p'(z)$$

$$= \left[\frac{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)-(\mu-1)I_{\lambda,\mu}\, f(z)}\right]\left[\frac{\left[\left(\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'-\left((\mu-1)I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'\right]\left(I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right)}{\left[I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right]^2}\right]$$

$$-\left[\frac{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)-(\mu-1)I_{\lambda,\mu}\, f(z)}\right]\left[\frac{\left[\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)-(\mu-1)\, I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right]\left(I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right)'}{\left[I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right]^2}\right]$$

dan

$$\frac{1}{(1-\beta)p(z)+\beta}(1-\beta)p'(z)$$

$$= \left[\frac{\left(\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)' - \left((\mu-1)I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z) - (\mu-1)I_{\lambda,\mu}\, f(z)}\right] - \left[\frac{\left(I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right)'}{\left[I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right]}\right]$$

Dengan menggunakan persamaan operator $\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z) - (\mu-1)I_{\lambda,\mu}\, f(z) = z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'$ maka persamaan di atas menjadi

$$\frac{(1-\beta)p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta}$$

$$= \left[\frac{\left(\mu I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)' - \left((\mu-1)I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}\right]$$

$$- \left[\frac{\left(I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right)'}{\left[I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right]}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (4.41)$$

Selanjutnya persamaan (4.41) di atas kedua sisi dikalikan dengan z, maka diperoleh:

$$\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta}$$

$$= \left[\frac{\mu z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)' - z\left((\mu-1)I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}\right] - \left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right)'}{\left[I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right]}\right]$$

$$\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta} = \left[\frac{\mu z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'} - (\mu-1)\right] - \left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right)'}{\left[I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right]}\right] \ldots \ldots (4.42)$$

Berdasarkan teorema 4.1 maka persamaan (4.42) kita dapat simpulkan terdapat $g \in S^*_{\lambda,\mu+1}(\alpha;\phi)$ sedemikian hingga $g \in S^*_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi)$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $f \in Q^*_{\lambda,\mu}\,(\alpha,\beta;\phi,\psi)$

Diberikan himpunan $q(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)} - \alpha\right]$ dengan

$q(z) = 1 + c_1\, z + c_2\, z + c_3\, z + \cdots$ adalah analisis di dalam U dengan

$q(0) = 1$. Dengan menggunakan persamaan operator integral (2.5) maka himpunan $q(z)$ berubah menjadi:

$$q(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)} - \alpha\right]$$

$$(1-\alpha)q(z) + \alpha = \left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, g(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}\right]$$

$$(1-\alpha)q(z)+\alpha = \left[\frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)-(\mu-1)\, I_{\lambda,\mu}\, g(z)}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}\right]$$

$$(1-\alpha)q(z)+\alpha = \frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}-(\mu-1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots (4.43)$$

Dari persamaan (4.43) di atas kita substitusikan ke persamaan (4.42) maka diperoleh

$$\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta} = \left[\frac{\mu z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}-(\mu-1)\right]-\left[\frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}-(\mu-1)\right]$$

$$\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta} = \left[\frac{\mu z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}-(\mu-1)\right]-\frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}$$

$$\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta} + \frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)} = \frac{\mu z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}$$

dan akhirnya di peroleh

$$\left[\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta} + \frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}\right] z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)' = \mu z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'$$

dengan sedikit kalkulasi maka diperoleh

$$\left(\frac{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}\right)\left(z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'\right)$$

$$= \mu z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)' - \left[\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta} z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'\right]$$

$$\mu I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)} = \mu z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)' - \left[\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta} z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'\right]$$

sehingga diperoleh

$$\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)} = \frac{\mu z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)} - \left[\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta}\, \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)}\right]$$

$$\frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)} - \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)} = \left[\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta}\, \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)}\right] \ldots.(4.44)$$

Berdasarkan persamaan yang diberikan diawal pembuktian yaitu:

$$(1-\beta)p(z)+\beta = \left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}\right]$$

maka persamaan (4.44) menjadi

$$\frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)} - \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)} = \left[\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}}\, \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)}\right]$$

selanjutnya diperoleh

$$\frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)} - \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)} = \frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)\, I_{\lambda,\mu}\, g(z)}{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'} \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)}$$

$$\frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)} - \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)} = (1-\beta)\, z\, p'(z) \frac{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}{\mu I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)} \ldots\ldots\ldots..(4.45)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.43) ke dalam persamaan (4.45) maka diperoleh

$$\frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)} - \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)} = (1-\beta)\, z\, p'(z)\, \frac{1}{(1-\alpha)q(z) + \alpha + (\mu - 1)}$$

$$\frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)} - \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}\right] = \frac{z\, p'(z)}{(1-\alpha)q(z) + \alpha + (\mu - 1)}$$

dengan mengalikan kedalam pada sebelah kiri persamaan di atas maka diperoleh

$$\frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)}\right]-\frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}\right]$$

$$=\frac{z\, p'(z)}{(1-\alpha)q(z)+\alpha+(\mu-1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (4.46)$$

dengan menggunakan persamaan pada awal pembuktian yaitu

$$(1-\beta)p(z)+\beta = \left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}\right]$$

Maka persamaan (4.46) di atas menjadi

$$\frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)}\right]-\frac{1}{(1-\beta)}[(1-\beta)p(z)+\beta]$$

$$=\frac{z\, p'(z)}{(1-\alpha)q(z)+\alpha+(\mu-1)}$$

$$\frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)}\right]-\frac{\beta}{(1-\beta)}-p(z)=\frac{z\, p'(z)}{(1-\alpha)q(z)+\alpha+(\mu-1)}$$

Sehingga akhirnya diperoleh persamaan

$$\frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu+1}\, g(z)}-\beta\right]=p(z)+\frac{z\,p'(z)}{(1-\alpha)q(z)+\alpha+(\mu-1)} \dots\dots (4.47)$$

Dengan menggunakan Lemma 2.1 maka diperoleh $q \prec \phi$ sehingga berdasarkan persamaan (4.26) diperoleh $Re\,\{(1-\alpha)q(z)+\alpha+(\mu-1)\}>0$ dengan

$$\omega=\frac{1}{(1-\alpha)q(z)+\alpha+(\mu-1)}.$$

Dengan menggunakan Lemma 2.2 maka akhirnya didapat $p \prec \psi$ mengakibatkan

$$f \in Q^*_{\lambda,\mu}\,(\alpha,\beta;\phi,\psi).$$

Selanjutnya akan dibuktikan bagian yang kedua yaitu $Q^*_{\lambda,\mu}\,(\alpha,\beta;\phi,\psi) \subset Q^*_{\lambda+1,\mu}\,(\alpha,\beta;\phi,\psi)$. Dengan langkah-langkah pembuktian yang sama seperti di atas maka kita mulai dengan

diberikan $f \in Q^*_{\lambda,\mu}\,(\alpha,\beta;\phi,\psi)$ maka terdapat $g \in S^*_{\lambda+1,\mu}(\alpha;\phi)$ sedemikian hingga.

$$\frac{1}{1-\beta}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}-\beta\right] \prec \psi(z),\ \ z \in U$$

Diberikan himpunan $p(z)=\frac{1}{1-\beta}\left[\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)}-\beta\right]$ dengan

$p(z) = 1 + c_1\, z + \; c_2\, z + c_3\, z + \cdots$ adalah analisis di dalam U dengan $p(0) = 1$. Dengan menggunakan persamaan operator integral (2.5) maka himpunan $p(z)$ berubah menjadi:

$$p(z) = \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)} - \beta\right]$$

$$(1-\beta)p(z) + \beta \;= \left[\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)}\right]$$

$$(1-\beta)p(z) + \beta \;= \left[\frac{(\lambda+1)\, I_{\lambda,\mu} f(z) - \lambda I_{\lambda+1,\mu} f(z)}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.48)$$

Dengan menggunakan aturan turunan logaritma pada kedua sisi persamaan di atas maka diperoleh :

$$\frac{1}{(1-\beta)p(z)+\beta}(1-\beta)p'(z) = \frac{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)}{(\lambda+1)\, I_{\lambda,\mu} f(z) - \lambda I_{\lambda+1,\mu} f(z)}$$

$$\cdot\left\{\frac{\left[(\lambda+1)\, I_{\lambda,\mu} f(z)' - \left(\lambda I_{\lambda+1,\mu} f(z)\right)'\right]\left(I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)\right) - \left[(\lambda+1)\, I_{\lambda,\mu} f(z) - \lambda I_{\lambda+1,\mu} f(z)\right]\left(I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)(z)\right)'}{\left[I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)\right]^2}\right\}$$

selanjutnya

$$\frac{1}{(1-\beta)p(z)+\beta}(1-\beta)p'(z)$$

$$= \left[\frac{I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)}{(\lambda+1)\; I_{\lambda,\mu}f(z) - \lambda I_{\lambda+1,\mu}f(z)}\right]\left[\frac{\left[(\lambda+1)\; I_{\lambda,\mu}f(z)' - \left(\lambda I_{\lambda+1,\mu}f(z)\right)'\right]\left(I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)\right)}{\left[I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)\right]^2}\right]$$

$$- \left[\frac{I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)}{(\lambda+1)\; I_{\lambda,\square}f(z) - \lambda I_{\lambda+1,\mu}f(z)}\right]\left[\frac{\left[(\lambda+1)\; I_{\lambda,\mu}f(z) - \lambda I_{\lambda+1,\mu}f(z)\right]\left(I_{\lambda,\mu}\; g(z)\right)'}{\left[I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)\right]^2}\right]$$

dan

$$\frac{1}{(1-\beta)p(z)+\beta}(1-\beta)p'$$

$$= \left[\frac{(\lambda+1)\; I_{\lambda,\mu}f(z)' - \left(\lambda I_{\lambda+1,\mu}f(z)\right)'}{(\lambda+1)\; I_{\lambda,\mu}f(z) - \lambda I_{\lambda+1,\mu}f(z)}\right] - \left[\frac{\left(I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)\right)'}{\left[I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)\right]}\right]$$

Dengan menggunakan persamaan operator $(\lambda+1)\; I_{\lambda,\mu}f(z) - \lambda I_{\lambda+1,\mu}f(z) = z\left(I_{\lambda+1,\mu}\; f(z)\right)'$ maka persamaan di atas menjadi

$$\frac{(1-\beta)p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta} = \left[\frac{(\lambda+1)\; I_{\lambda,\mu}f(z)' - \left(\lambda I_{\lambda+1,\mu}f(z)\right)'}{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\; f(z)\right)'}\right] - \left[\frac{\left(I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)\right)'}{\left[I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)\right]}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.49)$$

Selanjutnya persamaan (4.49) di atas kedua sisi dikalikan dengan *z*, maka diperoleh:

$$\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta}$$

$$= \left[\frac{z\left((\lambda+1)\, I_{\lambda,\mu} f(z)\right)' - z\left(\lambda I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}\right] - \left[\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)\right)'}{\left[I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)\right]}\right]$$

$$\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta} = \left[\frac{z\left((\lambda+1)\, I_{\lambda,\mu} f(z)\right)'}{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'} - \lambda)\right] - \left[\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)\right)'}{\left[I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)\right]}\right] \ldots .(4.50)$$

Berdasarkan teorema 4.1 maka persamaan (4.50) kita dapat simpulkan terdapat $g \in S^*_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi)$ sedemikian hingga $g \in S^*_{\lambda+1,\mu}(\alpha;\phi)$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $f \in Q^*_{\lambda+1,\mu}\,(\alpha,\beta;\phi,\psi)$

Diberikan himpunan $q(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)} - \alpha\right]$ dengan

$q(z) = 1 + c_1 z + c_2 z + c_3 z + \cdots$ adalah analisis di dalam U dengan

$q(0) = 1$. Dengan menggunakan persamaan operator integral (2.5) maka himpunan $q(z)$ berubah menjadi:

$$q(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)} - \alpha\right]$$

$$(1-\alpha)q(z)+\alpha \;=\left[\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)}\right]$$

$$(1-\alpha)q(z)+\alpha \;=\left[\frac{(\lambda+1)\; I_{\lambda,\mu}g(z)-\lambda I_{\lambda+1,\mu}g(z)}{I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)}\right]$$

$$(1-\alpha)q(z)+\alpha=\frac{(\lambda+1)\; I_{\lambda,\mu}g(z)}{I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)}-\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots(4.51)$$

Dari persamaan (4.51) di atas kita substitusikan ke persamaan (4.50) maka diperoleh

$$\frac{(1-\beta)\; z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta}=\left[\frac{z\left((\lambda+1)\; I_{\lambda,\mu}f(z)\right)'}{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\; f(z)\right)'}-\lambda)\right]-\left[\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)\right)'}{\left[I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)\right]}\right]$$

$$\frac{(1-\beta)\; z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta}=\left[\frac{z\left((\lambda+1)\; I_{\lambda,\mu}f(z)\right)'}{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\; f(z)\right)'}-\lambda\right]-\frac{(\lambda+1)\; I_{\lambda,\mu}g(z)}{I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)}+\lambda$$

$$\frac{(1-\beta)\; z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta}\;+\;\frac{(\lambda+1)\; I_{\lambda,\mu}g(z)}{I_{\lambda+1,\mu}\; g(z)}=\left[\frac{(\lambda+1)z\left(I_{\lambda,\mu}\; f(z)\right)'}{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\; f(z)\right)'}\right]$$

dan akhirnya di peroleh

$$\left[\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta} + \frac{(\lambda+1)\, I_{\lambda,\mu} g(z)}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)}\right] z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'$$

$$= (\lambda+1) z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'$$

dengan sedikit kalkulasi maka diperoleh

$$\left(\frac{(\lambda+1)\, I_{\lambda,\mu} g(z)}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)}\right)\left(z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'\right)$$

$$= (\lambda+1) z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)' - \left[\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta} z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'\right]$$

$$(\lambda+1)\, I_{\lambda,\mu} g(z) \frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)}$$

$$= (\lambda+1) z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)' - \left[\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta}\ z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'\right]$$

sehingga diperoleh

$$\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)} = \frac{(\lambda+1) z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{(\lambda+1)\, I_{\lambda,\mu} g(z)} - \left[\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta}\, \frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{(\lambda+1) I_{\lambda,\mu}\, g(z)}\right]$$

$$\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)} - \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu} g(z)}$$

$$= \left[\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta}\, \frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\, g(z)}\right] \dots\dots\dots\dots(4.52)$$

Berdasarkan persamaan yang diberikan diawal pembuktian yaitu:

$$(1-\beta)p(z)+\beta \;= \left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}\right]$$

maka persamaan (4.52) menjadi

$$\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)} - \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)} = \left[\frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)}{\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}}\, \frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\, g(z)}\right]$$

selanjutnya diperoleh

$$\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)} - \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)} = \frac{(1-\beta)\, z\, p'(z)\, I_{\lambda,\mu}\, g(z)}{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'} \frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\, g(z)}$$

$$\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)} - \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}$$

$$= (1-\beta)\, z\, p'(z)\, \frac{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}{(\lambda+1)I_{\lambda,\mu}\, g(z)} \dots\dots\dots\dots(4.53)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.51) ke dalam persamaan (4.53) maka diperoleh

$$\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)} - \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)} = (1-\beta)\, z\, p'(z)\, \frac{1}{(1-\alpha)q(z)+\alpha+\lambda}$$

$$\frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)} - \frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}\right] = \frac{z\, p'(z)}{(1-\alpha)q(z)+\alpha+\lambda}$$

dengan mengalikan kedalam pada sebelah kiri persamaan di atas maka diperoleh

$$\frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)}\right] - \frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}\right]$$

$$= \frac{z\, p'(z)}{(1-\alpha)q(z)+\alpha+\lambda} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. (4.54)$$

dengan menggunakan persamaan pada awal pembuktian yaitu

$$(1-\beta)p(z)+\beta = \left[\frac{z\left(I_{\square,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\, g(z)}\right]$$

Maka persamaan (4.54) di atas menjadi

$$\frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)}\right]-\frac{1}{(1-\beta)}[(1-\beta)p(z)+\beta]=\frac{z\,p'(z)}{(1-\alpha)q(z)+\alpha+\lambda}$$

$$\frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)}\right]-\frac{\beta}{(1-\beta)}-p(z)=\frac{z\,p'(z)}{(1-\alpha)q(z)+\alpha+\lambda}$$

Sehingga akhirnya diperoleh persamaan

$$\frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{z\left(I_{\lambda+1,\mu}\, f(z)\right)'}{I_{\lambda+1,\mu}\, g(z)}-\beta\right]=p(z)+\frac{z\,p'(z)}{(1-\alpha)q(z)+\alpha+\lambda}\ \dots\dots(4.34)$$

Dengan menggunakan Lemma 2.1 maka diperoleh $q \prec \phi$ sehingga berdasarkan persamaan (4.34) diperoleh $Re\,\{(1-\alpha)q(z)+\alpha+\lambda\}>0$ dengan

$$\omega=\frac{1}{(1-\alpha)q(z)+\alpha+\lambda}.$$

Dengan menggunakan Lemma 2.2 maka akhirnya didapat $p \prec \psi$ mengakibatkan

$$f \in Q^{*}_{\lambda+1,\mu}\,(\alpha,\beta;\phi,\psi).$$

BAB V

FUNGSI STARLIKE YANG STRONGLY

MELIBATKAN OPERATOR INTEGRAL LIBERA

5.1 Subkelas Fungsi Univalen

Andaikan N kelas semua fungsiϕ yang analisis dan univalen dalam U untuk $\phi(U)$ adalah *convex* dengan $\phi(0)$ dan $Re\{\phi\} > 0$ untuk $z \in U$. Dengan menggunakan prinsip dasar pada subordinasi antara fungsi univalen diperkenalkan subkelas $S^*\ (\alpha;\phi)$, $C^*\ (\alpha;\phi)$ dan $Q^*\ (\alpha,\beta;\phi,\psi)$ pada kelas S untuk $\alpha \geq 0$ dan $\phi \in N$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S^*\ (\alpha;\phi) = \left\{ f \in S: \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{zf(z))'}{f(z)} - \alpha\right] \prec \phi(z), \qquad z \in U \right\}$$

$$C^*\ (\alpha;\phi) = \left\{ f \in S: \frac{1}{1-\alpha}\left[1 + \frac{zf(z))'}{f(z)} - \alpha\right] \prec \phi(z), \qquad z \in U \right\}$$

dan

$$Q^*(\alpha,\beta;\phi,\psi) = \left\{ f \in S; \exists g \in S^*\ (\alpha;\phi) \ni \frac{1}{1-\beta}\left[1 + \frac{zf(z))'}{g(z)} - \beta\right] \prec \psi(z), \right\}$$

Seterusnya dengan menggunakan operator integral choi-saigo-srivastava $I_{\lambda,\mu}f(z)$ diperkenalkan kelas pada fungsi univalen, yaitu:

$$S^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha;\phi) = \left\{f \in S, I_{\lambda,\mu}f(z) \in S^*\ (\alpha;\phi)\right\}$$

$$C^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha;\phi) = \left\{f \in S, I_{\lambda,\mu}f(z) \in C^*\ (\alpha;\phi)\right\}$$

dan

$$Q^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha,\beta;\phi,\psi) = \left\{f \in S, I_{\lambda,\mu}f(z) \in Q^*(\alpha,\beta;\phi,\psi)\right\}$$

dengan catatan bahwa $f(z) \in C^*\ (\alpha;\phi) \leftrightarrow zf'z \in S^*\ (\alpha;\phi) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5.1)$

Sifat pada subkelas seperti yang dinyatakan diatas telah dibuktikan dengan melibatkan operator integral yang telah diperkenalkan oleh Choi-Saigo-Srivastava pada bab sebelumnya. Selanjutnya dengan subkelas yang sama, yaitu: $S^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha;\phi)$ $C^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha;\phi)$ akan diperlihatkan sifat-sifat subkelas tersebut dengan melibatkan Integral Libera. Untuk $c > -1$ dan $f\ \in S$ dengan mengingat kembali operator integral Bernardi-Libera-Livingston yang dilambangkan sebagai L_c dan dinyatakan dengan :

$$L_c(f) = L_c(f)(z) = \frac{c+1}{z^c}\int_0^z t^{c-1}\ f(t)\, dt$$

Berdasarkan integral tersebut didapat sebuah persamaan

$$z\left(I_{\lambda,\mu}f(z)\right)L_c(f)(z)' = (c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - cI_{\lambda,\mu}f(z)L_c(f)(z) \dots\dots\dots\dots (5.2)$$

Berikut akan diberikan sifat-sifat subkelas fungsi univalen dengan melibatkan integral Libera.

5.2 Sifat Subkelas Fungsi Starlike $S^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha;\phi)$

Teorema 5.1

Misalkan $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ dan $\alpha \geq 0,\ \ \phi \in N$. Jika $f \in S^*_{\lambda,\mu}(\alpha\colon\phi)$, maka $Lc\ f \in S^*_{\lambda,\mu}(\alpha\colon\phi)$.

Bukti:

Misalkan $f \in S^*_{\lambda,\mu}(\alpha\colon\phi)$ maka akan ditunjukkan $Lc\ f \in S^*_{\lambda,\mu}$. Diberikan himpunan

$$P(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}Lcf(z)'}{(I_{\lambda,\mu}Lcf(z)} - \alpha\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (5.3)$$

Dengan $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$ adalah fungsi analitik di dalam U, $P(0) = 1$ dan $P(z) \neq 0, z \in U$.

Berdasarkan persamaan 5.2 persamaan integral libera maka dengan sedikit kakulasi didapat

$$z(I_{\lambda,\mu}Lcf(z))' = (c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - cI_{\lambda,\mu}Lcf(z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.4)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (5.3) dan (5.4) maka diperoleh persamaan baru yaitu:

$$P(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - cI_{\lambda,\mu}Lcf(z)}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)} - \alpha\right]$$

$$(1-\alpha)P(z) \ = \left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - cI_{\lambda,\mu}Lcf(z)}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)} - \alpha\right]$$

$$(1-\alpha)P(z) + \mu \ = \left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - cI_{\lambda,\mu}Lcf(z)}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)}\right]$$

$$(1-\alpha)P(z) + \alpha \ = \left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)} - c\right]$$

$$(1-\alpha)P(z) + (\alpha + c) = \left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)}\right] \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..\dots (5.5)$$

Setelah didapat persamaan baru tersebut maka, selanjutnya dengan menggunakan aturan turunan logaritma pada kedua sisi persamaan (5.5) diatas maka persamaan menjadi:

$$\frac{1}{(1-\mu)P(z)+\mu+c}(1-\mu)P'(z)$$

$$=\frac{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)}{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)}$$

$$\cdot\frac{(c+1)(I_{\lambda,\mu}f(z)'I_{\lambda,\mu}Lcf(z)-(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)(I_{\lambda,\mu}Lcf(z))'}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)^2}$$

$$\frac{(1-\mu)P'(z)}{(1-\mu)P(z)+\mu+c}=\frac{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)}{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)}\cdot\left\{\frac{(c+1)(I_{\lambda,\mu}f(z)'I_{\lambda,\mu}Lcf(z)}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)^2}\right\}-$$

$$\frac{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)}{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)}\cdot\left\{\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)(I_{\lambda,\mu}Lcf(z))'}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)^2}\right\}$$

Akhirnya diperoleh:

$$\frac{(1-\mu)P'(z)}{(1-\mu)P(z)+\mu+c}=\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)'}{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)}-\frac{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)'}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)^2}$$

$$\frac{(1-\mu)P'(z)}{(1-\mu)P(z)+\mu+c}=\frac{I_{\lambda,\mu}f(z)'}{I_{\lambda,\mu}f(z)}-\frac{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)'}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.6)$$

Langkah selanjutnya adalah mengalikan dengan bilangan kompleks z pada setiap sisi pada persamaan (5.6) di atas maka diperoleh:

$$\frac{(1-\mu)zP'(z)}{(1-\mu)P(z)+\mu+c}=\frac{zI_{\lambda,\mu}f(z)'}{I_{\lambda,\mu}f(z)}-\frac{zI_{\lambda,\mu}Lcf(z)'}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)^2}$$

Dari persamaan di atas maka subtitusikan persamaan integral libera ke dalam persamaan diatas maka menjadi:

$$\frac{(1-\mu)zP'(z)}{(1-\mu)P(z)+\mu+c} = \frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z)')}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - \left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - cI_{\lambda,\mu}Lcf(z)}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)}\right]$$

$$\frac{(1-\mu)zP'(z)}{(1-\mu)P(z)+\mu+c} = \frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - \left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - c}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)}\right] \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5.7)$$

Berdasarkan persamaan (5.5) yaitu: $(1-\mu)P(z)+\mu+c = \frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)}$

Maka persamaan (5.7) di atas menjadi:

$$\frac{(1-\mu)zP'(z)}{(1-\mu)P(z)+\mu+c} = \frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - [(1-\mu)P(z)+\mu+c-c]$$

$$\frac{(1-\mu)zP'(z)}{(1-\mu)P(z)+\mu+c} = \frac{zI_{\lambda,\mu}f(z)'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - (1-\mu)P(z) - \mu$$

Dengan sedikit kakulasi maka persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{zP'(z)}{(1-\mu)P(z)+\mu+c} = \frac{1}{(1-\mu)}\left\{\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - (1-\mu)P(z) - \mu\right\}$$

$$\frac{zP'(z)}{(1-\mu)P(z)+\mu+c} = \frac{1}{(1-\mu)}\left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)}\right] - \frac{1}{(1-\mu)}[(1-\mu)P(z)+\mu]$$

$$\frac{zP'(z)}{(1-\mu)P(z)+\mu+c} = \frac{1}{(1-\mu)}\left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)}\right] - P(z) - \frac{1}{(1-\mu)}\mu$$

$$\frac{zP'(z)}{(1-\mu)P(z)+\mu+c} + P(z) = \frac{1}{(1-\mu)}\left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - \mu\right] \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5.8)$$

Dengan menggunakan Lemma 2.1 maka persamaan 5.8 di atas dapat disimpulkan bahwa $P < \phi$, artinya $Lc\ f \epsilon\ S^*_{\lambda,\mu}(\alpha{:}\,\phi)$.

5.3 Sifat Subkelas $S^*_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi)$ fungsi starlike yang strongly melibatkan integral Libera

Teorema 5.2 Misalkan $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ dan $a \geq 0, \emptyset \in N$. Jika $f \in s^*_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi)$ maka $Lc\ f \in s^*_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi)$

Bukti:

Misalkan $f \epsilon\ S^*_{\lambda,\mu}(\alpha{:}\,\phi)$ maka akan ditunjukkan $Lc\ f\ \epsilon\ S^*_{\lambda,\mu}$. Diberikan himpunan

$$p(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}Lcf(z)'}{(I_{\lambda,\mu}Lcf(z)} - \alpha\right] \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. (5.9)$$

Dengan $p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$ adalah fungsi analitik di dalam U, $P(0) = 1$ dan $p(z) \neq 0, z \epsilon U$.

Berdasarkan persamaan 5.2 persamaan integral libera maka dengan sedikit kakulasi didapat

$$z(I_{\lambda,\mu} Lcf(z))' = (c+1) I_{\lambda,\mu} f(z) - c I_{\lambda,\mu} Lcf(z) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (5.10)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (5.9) dan (5.10) maka diperoleh persamaan baru yaitu:

$$p(z) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu} f(z) - cI_{\lambda,\mu} Lcf(z)}{I_{\lambda,\mu} Lcf(z)} - \alpha\right]$$

$$(1-\alpha)p(z) \ = \left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu} f(z) - cI_{\lambda,\mu} Lcf(z)}{I_{\lambda,\mu} Lcf(z)} - \alpha\right]$$

$$(1-\alpha)p(z) + \mu \ = \left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu} f(z) - cI_{\lambda,\mu} Lcf(z)}{I_{\lambda,\mu} Lcf(z)}\right]$$

$$(1-\alpha)p(z) + \alpha \ = \left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu} f(z)}{I_{\lambda,\mu} Lcf(z)} - c\right]$$

$$(1-\alpha)p(z) + (\alpha + c) = \left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu} f(z)}{I_{\lambda,\mu} Lcf(z)}\right] \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . . \ldots (5.11)$$

Setelah didapat persamaan baru tersebut maka, selanjutnya dengan menggunakan aturan turunan logaritma pada kedua sisi persamaan (5.5) diatas maka persamaan menjadi:

$$\frac{1}{(1-\alpha)p(z)+\alpha+c}(1-\alpha)p'(z)$$

$$= \frac{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)}{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)}$$

$$\cdot \frac{(c+1)(I_{\lambda,\mu}f(z)' I_{\lambda,\mu}Lcf(z) - (c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)(I_{\lambda,\mu}Lcf(z))'}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)^2}$$

$$\frac{(1-\alpha)p'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\mu+c} = \frac{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)}{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)} \cdot \left\{\frac{(c+1)(I_{\lambda,\mu}f(z)' I_{\lambda,\mu}Lcf(z)}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)^2}\right\} -$$

$$\frac{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)}{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)} \cdot \left\{\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)(I_{\lambda,\mu}Lcf(z))'}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)^2}\right\}$$

Akhirnya diperoleh:

$$\frac{(1-\alpha)p'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\alpha+c} = \frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)'}{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)} - \frac{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)'}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)^2}$$

$$\frac{(1-\alpha)p'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\mu+c} = \frac{I_{\lambda,\mu}f(z)'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - \frac{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)'}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (5.12)$$

Langkah selanjutnya adalah mengalikan dengan bilangan kompleks z pada setiap sisi pada persamaan (5.12) di atas maka diperoleh:

$$\frac{(1-\alpha)zp'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\mu+c} = \frac{zI_{\lambda,\mu}f(z)'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - \frac{zI_{\lambda,\mu}Lcf(z)'}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)^2}$$

Dari persamaan di atas maka subtitusikan persamaan integral libera ke dalam persamaan diatas maka menjadi:

$$\frac{(1-\alpha)zp'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\mu+c} = \frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z)')}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - \left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - cI_{\lambda,\mu}Lcf(z)}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)}\right]$$

$$\frac{(1-\alpha)zp'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\mu+c} = \frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - \left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - c}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)}\right] \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5.13)$$

Berdasarkan persamaan (5.11) yaitu: $(1-\alpha)p(z)+\alpha+c = \frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z)}{I_{\lambda,\mu}Lcf(z)}$

Maka persamaan (5.13) di atas menjadi:

$$\frac{(1-\alpha)zp'(z)}{(1-\alpha)P(z)+\alpha+c} = \frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - [(1-\alpha)p(z)+\alpha+c-c]$$

$$\frac{(1-\alpha)zp'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\alpha+c} = \frac{zI_{\lambda,\mu}f(z)'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - (1-\alpha)p(z) - \alpha$$

Dengan sedikit kakulasi maka persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{zp'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\alpha+c} = \frac{1}{(1-\alpha)}\left\{\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)} - (1-\alpha)p(z) - \alpha\right\}$$

$$\frac{zp'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\alpha+c}=\frac{1}{(1-\alpha)}\left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)}\right]-\frac{1}{(1-\alpha)}[(1-\alpha)p(z)+\alpha]$$

$$\frac{zp'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\alpha+c}=\frac{1}{(1-\alpha)}\left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)}\right]-p(z)-\frac{1}{(1-\alpha)}\alpha$$

$$\frac{zp'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\alpha+c}+p(z)=\frac{1}{(1-\alpha)}\left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)}-\alpha\right]\dots\dots\dots\dots.\dots(5.14)$$

$$\frac{(1-\alpha)zp'(z)}{(1-\alpha)p(z)+\alpha+c}+(1-\alpha)p(z)=\left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}f(z)}-\alpha\right]\dots\dots\dots\dots.\dots(5.15)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $s^*_{\lambda,\mu+1}(\alpha;\phi)\subset s^*_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi)$ adalah fungsi starlike yang strongly . Andaikan terdapat titik $z_0\in\mu$ sehingga:

$$|\arg h(z)|<\frac{\pi}{2}\rho \qquad (|z|<|z_0|\,, \qquad |\arg h(z_0)|=\frac{\pi}{2}\rho$$

Dengan menggunakan lemma 2.3 kita dapat menulis bahwa

$$\frac{z_0h'(z_0)}{h(z_0)}=ik\rho \text{ dan } \left(h'(z_0)\right)^{\frac{1}{\rho}}=\pm ia \qquad (a>0)\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(5.16)$$

Selanjutnya kita akan menentukan $\arg h(z_0)=-\frac{\pi}{2}\rho$ dan $\arg h(z_0)=\frac{\pi}{2}\rho$

1. Jika $\arg h(z_0)=-\frac{\pi}{2}\rho$, maka dari persamaan 5.15 diperoleh;

$$\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z))'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z)} - \alpha = (1-\alpha)p(z) + \frac{(1-\alpha)zp'(z)}{(1-\alpha)p(z)+(\alpha+c)}$$

dan

$$\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z_0)} - \alpha = (1-\alpha)p(z_0) + \frac{(1-\alpha)z_0p'(z_0)}{(1-\alpha)p(z_0)+(\alpha+c)}$$

$$\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z_0)} - \alpha = (1-\alpha)p(z) + \frac{(1-\alpha)p(z_0).\frac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)}}{(1-\alpha)p(z_0)+(\alpha+c)}$$

$$= (1-\alpha)h(z) +$$

$$\left\{\frac{1+\frac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)}}{(1-\alpha)p(z_0)+(\alpha+c)}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots(5.17)$$

Selanjutnya persamaan titik 5.17 dapat di bentuk kebentuk eksponen menggunakan:

$$\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z_0)} - \alpha = \left\{(1-\alpha)a^\rho e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}\left(1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^\rho e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+c)}\right)\right\} \dots(5.18)$$

Sekarang menentukan arg dari persamaan 5.18 yaitu:

$$\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z_0)} - \alpha\right\}$$

$$= \arg\left((1-\alpha)a^\rho e^{i\frac{\pi}{2}\rho}\right) + \arg\left\{1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^\rho e^{-i\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+c)}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\rho + \arg\left\{1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha+c)}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.19)$$

Untuk menentukan nilai $\arg\left\{1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha+c)}\right\}$ pada persamaan 5.19 maka dilakukan proses sebagai berikut:

Misalkan :

$$z = \left\{1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha+c)}\right\}$$

$$= \frac{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha+c) + ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha+c)}$$

$$= \frac{(1-\alpha)a^{\rho}[\cos\frac{\pi}{2}\rho - i\sin\frac{\pi}{2}\rho] + (\alpha+c) + ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}[\cos\frac{\pi}{2}\rho - i\sin\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)]}$$

$$z = \frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right) + i\left(k\rho - (1-\alpha)\,a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right) - i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}$$

Maka selanjutnya z dikalikan dengan sekawan nya untuk mendapatkan nilai x dan y, yaitu:

$$z = \frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right) + i\left(k\rho - (1-\alpha)\,a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right) - i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}$$

$$\times\left\{\frac{\left((1-\alpha)\alpha^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right) + i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)\alpha^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right) + i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}\right\}$$

$$z = \left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\tfrac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)^2 + \left\{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\tfrac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)\right.$$

$$\left.\times\ i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\tfrac{\pi}{2}\rho\right)\right\} + \left\{i\ \left(k\rho - (1-\alpha)a^{\rho}\sin\tfrac{\pi}{2}\rho\right)\right.$$

$$\left.\times\ \left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\tfrac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)\right\} + \left\{i^2\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\tfrac{\pi}{2}\rho\right)\right.$$

$$\left.\times\ \left(k\rho - (1-\alpha)a^{\rho}\sin\tfrac{\pi}{2}\rho\right)\right\}$$

$$:\left\{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\tfrac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)^2 - i^2\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\tfrac{\pi}{2}\rho\right)^2\right\}$$

Dan akhirnya di dapat z yang sederhana yaitu:

$$z = \left\{\left((1-\alpha)\alpha^{\rho}\cos\tfrac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)^2 - \left(\left((1-\alpha)a\sin\tfrac{\pi}{2}\rho\right)\left(k\rho - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.(1-\alpha)a^{\rho}\sin\tfrac{\pi}{2}\rho\right)\right)\right\}$$

$$\frac{+i\left\{\left((1-\alpha)a\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho + k\rho - (1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)\right\}}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)^2 - i^2\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2}$$

$$z = \left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)^2 - k\rho(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho$$

$$+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2$$

$$\frac{+ik\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)^2 - i^2\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2}$$

Berdasarkan bilangan z di atas, maka di dapat nilai x dan y yaitu:

$$x = \frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)^2 + \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2 - k\rho(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)^2 - i^2\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2}$$

dan

$$y = \frac{k\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)^2 - i^2\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2}$$

Sehingga untuk nilai $\arg z$ yang didapat adalah:

$$\arg z = arc\tan\frac{y}{x}$$

$$= arc\tan\frac{k\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)^2 + \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2 - k\rho(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho}$$

$$= \tan^{-1}\left(k\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)\right)$$

$$\times \left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\tfrac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)^2 + \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\tfrac{\pi}{2}\rho\right)^2 - k\rho(1-$$

$$\alpha)a^{\rho}\sin\tfrac{\pi}{2}\rho$$

Maka persamaan 4.16 dapat dilanjutkan untuk menentukan arg z nya dengan menggunakan persamaan di atas, yaitu:

$$\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\,f(z_0)}-\alpha\right\}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\rho+\arg\left\{1+\frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{-\frac{\pi}{2}\rho}+(\alpha+c)}\right\}$$

$$=-\ \frac{\pi}{2}\rho$$

$$+\ \tan^{-1}\frac{k\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+c)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+c)\right)^2+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2-k\rho(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho}$$

$$\leq-\frac{\pi}{2}\rho$$

Dengan $k\ \leq\left(\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)\leq-1,\quad \alpha+\beta\geq-\gamma$ hal ini kontradiksi dengan $Lc\ f\in s^{*}_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi)$. Berdasarkan hasil arg $h(z_0)=\ \frac{-\pi}{2}\rho$ maka diperoleh $\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\,f(z_0)}-\alpha\right\}\leq\ \frac{\pi}{2}\rho$.

2. Jika arg $h(z_0)=\frac{\pi}{2}\rho$ maka:

$$\frac{z(I_{\lambda,\mu+1}f(z))'}{I_{\lambda,\mu+1}\,f(z)}-\alpha\ =(1-a)\ h(z_0)+\frac{(1-a)z_0p'(z_0)}{(1-a)h(z_0)+(\alpha+c)}$$

$$= (1-a)\, p(z_0) + \left(1 + \frac{z_0 p'(z_0)}{(1-a)p(z_0) + (\alpha + c)}\right)$$

$$= (1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}\left(1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha + c)}\right)$$

Selanjutnya:

$$\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\, f(z_0)} - \alpha\right\}$$

$$= \arg\left\{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}\left(1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha + c)}\right)\right\}$$

$$= \arg\left\{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho}\right\} + \arg\left\{1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha + c)}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\rho + \arg\left\{1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha + c)}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.18)$$

Untuk menentukan $\arg\left\{1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha + c)}\right\}$ Maka kita akan lakukan proses sebagai berikut:

Misalkan:

$$z = \left\{1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha + c)}\right\}$$

$$z = \frac{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha + \mu + 1) + ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha + c)}$$

$$= \frac{(1-\alpha)a^{\rho}\left[\cos\frac{\pi}{2}\rho + i\sin\frac{\pi}{2}\rho\right] + (\alpha + c) + ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}\left[\cos\frac{\pi}{2}\rho + i\sin\frac{\pi}{2}\rho\right] + (\alpha + c)}$$

$$= \frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + c)\right) + i\left(k\rho + (1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + c)\right) + i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}$$

Maka selanjutnya:

$$z = \left\{\frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + c)\right) + i\left(k\rho + (1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + c)\right) + i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)}\right\}$$

$$\times \left\{\frac{\left(\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + c)\right) - i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)\right)}{\left(\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + c)\right) - i\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)\right)}\right\}$$

Dengan sedikit kalkulasi sehingga didapat z dengan bentuk yang sederhana, yaitu:

$$z = \left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + c)\right)^2 + k\rho(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho$$

$$+ \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2$$

$$+ \frac{ik\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + c)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha + c)\right)^2 + \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2}$$

Berdasarkan bilangan z di atas,maka didapat nilai x dan y yatu:

x

$$= \frac{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+c)\right)^2+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2+k\rho(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+c)\right)^2+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2}$$

dan

$$y = \frac{ik\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+c)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+c)\right)^2+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2}$$

Sehingga untuk nilai $\arg(z)$ yang didapat adalah:

$$\arg z = arc\tan\frac{y}{x}$$

$$= arc\tan\frac{ik\rho\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+c)\right)}{\left((1-\alpha)a\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+c)\right)^2+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^2+k\rho(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho}$$

$$= \tan^{-1}\left(k\rho\,(1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho+(\alpha+c)\right)$$

$$\times\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\tfrac{\pi}{2}\rho+(\alpha+c)\right)^2+\left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\tfrac{\pi}{2}\rho\right)^2+$$

$k\rho$ ... (4.19)

Maka persamaan 4.18 dapat dilanjutkan untuk menentukan $\arg z$ nya dengan melihat persamaan 4.19 yaitu:

$$\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\,f(z_0)}-\alpha\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\rho + \arg\left\{1 + \frac{ik\rho}{(1-\alpha)a^{\rho}e^{i\frac{\pi}{2}\rho} + (\alpha + c)}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\rho$$

$$+ \tan^{-1}\frac{\left(k\rho\ (1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+\mu+1)\right)}{\left((1-\alpha)a^{\rho}\cos\frac{\pi}{2}\rho + (\alpha+c)\right)^{2} + \left((1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho\right)^{2} + k\rho(1-\alpha)a^{\rho}\sin\frac{\pi}{2}\rho}$$

$$\geq \frac{\pi}{2}\rho$$

Hal ini juga mengakibatkan hal yang kontradiksi terhadap $Lc\ f \in s^{*}_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi)$. Berdasarkan hasil arg $h(z_0) = \frac{\pi}{2}\rho$ maka diperoleh $\arg\left\{\frac{z_0(I_{\lambda,\mu+1}f(z_0))'}{I_{\lambda,\mu+1}\ f(z_0)} - \alpha\right\} \geq \frac{\pi}{2}\rho$. Berdasarkan kedua hasil yang diperoleh,

sehingga fungsi $h(z)$ hanya memenuhi untuk nilai $|\arg z| < \frac{\pi}{2}\rho \quad (z \in U)$,

$$\left|\arg\left\{\frac{z(I_{\lambda,\mu}Lcf(z)'}{(I_{\lambda,\mu}Lcf(z)} - \alpha\right\}\right| < \frac{\pi}{2}\rho, \quad (z \in \mu)$$

5.4 Sifat Subkelas Fungsi Convex $C^{*}_{\lambda,\mu}(\alpha:\phi)$

Teorema 5.3

Misalkan $\lambda \geq 0, \mu \geq 1$ dan $\alpha \geq 0,\ \ \phi \epsilon N$. Jika $f\ \epsilon\ C^{*}_{\lambda,\mu}(\alpha:\phi)$, maka $Lc\ f\ \epsilon\ C^{*}_{\lambda,\mu}(\alpha:\phi)$.

Bukti:

Dengan menggunakan persamaan (5.1) dan teorema (5.1) maka persamaan di atas dapat dibuktikan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f\epsilon C^*_{\lambda,\mu}(\alpha:\phi) &\Leftrightarrow zf'(z)\epsilon S^*_{\lambda,\mu}(\alpha:\phi)\\
&\Leftrightarrow (Lc\ zf'(z))\epsilon S^*_{\lambda,\mu}(\alpha:\phi)\\
&\Leftrightarrow z(Lc\ f'(z))\epsilon S^*_{\lambda,\mu}(\alpha:\phi)\\
&\Leftrightarrow Lc\ f'(z)\epsilon C^*_{\lambda,\mu}(\alpha:\phi).
\end{aligned}
$$

5.5 Sifat Subkelas Fungsi Close-to-Convex $\boldsymbol{Q^*_{\lambda,\mu}\ (\alpha,\beta;\phi,\psi)}$

Teorema 5.4 Misalkan $\lambda \geq 0, \mu \geq 1$ dan $\alpha,\beta \geq 0,$ $\phi, \Psi\ \epsilon N.$ Jika $f\ \epsilon\ Q^*_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta:\phi,\Psi)$, maka $Lc\ f\ \epsilon\ Q^*_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta:\phi,\Psi)$.

Bukti:

Diberikan $f\epsilon Q^*_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta:\phi,\Psi)$ maka akan ditunjukkan $Lc\ f\epsilon Q^*_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta:\phi,\Psi)$ yaitu fungsi univalen yang melibatkan integral libera.

Jika diberikan $f\epsilon Q^*_{\lambda,\mu}(\alpha,\beta:\phi,\varphi)$ maka terdapat $g\epsilon S^*_{\lambda,\mu}(\alpha:\phi)$ sedemikian sehingga

$$\frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}g(z)}-\beta\right] < \Psi(\mathrm{z}), \mathrm{z}\in \mathrm{U}.$$

Untuk mendapatkan $g\epsilon S^*_{\lambda,\mu}(\alpha:\phi)$ maka diberikan:

$$P(z) = \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}g(z)} - \beta\right]$$

dengan $P(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$adalah fungsi analitik di dalam U dengan $P(0) = 1$. Selanjutnya dengan menggunakan persamaan operator (5.4) mak himpunan $P(z)$ menjadi:

$$(1-\beta)P(z) = \left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}\, Lc\; g(z)} - \beta\right]$$

$$(1-\beta)P(z) + \beta = \left[\frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}\, Lc\; g(z)}\right] \tag{5.20}$$

$$(1-\beta)P(z) + \beta = \frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - cI_{\lambda,\mu}\, Lc\; f(z)}{I_{\lambda,\mu}\, Lc\; g(z)} \tag{5.21}$$

Dengan menggunakan aturan turunan logaritma natural pada kedua sisi persamaan di atas, maka diperoleh:

$$\frac{1}{(1-\beta)P(z)+\beta}(1-\beta)P'(z) = \frac{I_{\lambda,\mu}\, Lc\; g(z)}{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - cI_{\lambda,\mu}\, Lc\; f(z)}$$

$$= \frac{\left[(c+1)\left(I_{\lambda,\mu}f(z)\right)' - c(I_{\lambda,\mu}\, Lc\; f(z))'\right]\left(I_{\lambda,\mu}\, Lc\; g(z)\right)}{[I_{\lambda,\mu}\, Lc\; g(z)]^2}$$

$$\cdot \frac{-\left[(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - cI_{\lambda,\mu}\, Lc\; f(z)\right]\cdot[I_{\lambda,\mu}\, Lc\; g(z)]'}{[I_{\lambda,\mu}\, Lc\; g(z)]^2}$$

$$\frac{(1-\beta)P'(z)}{(1-\beta)P(z)+\beta} = \frac{I_{\lambda,\mu}\, Lc\ g(z)}{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - cI_{\lambda,\mu}\, Lc\ f(z)}$$

$$\cdot \left\{ \frac{(c+1)\left(I_{\lambda,\mu}f(z)\right)' - c(I_{\lambda,\mu}\, Lc\ f(z))' \cdot \left(I_{\lambda,\mu}\, Lc\ g(z)\right)'}{[I_{\lambda,\mu}\, Lc\ g(z)]^2} \right\}$$

$$\frac{(1-\beta)P'(z)}{(1-\beta)P(z)+\beta} = \frac{I_{\lambda,\mu}\, Lc\ g(z)}{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - cI_{\lambda,\mu}\, Lc\ f(z)}$$

$$\cdot \left\{ \frac{\left[(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - cI_{\lambda,\mu}\, Lc\ f(z)\right]\left(I_{\lambda,\mu}\, Lc\ g(z)\right)'}{[I_{\lambda,\mu}\, Lc\ g(z)]^2} \right\}$$

$$\frac{(1-\beta)P'(z)}{(1-\beta)P(z)+\beta}$$

$$= \frac{(c+1)\left(I_{\lambda,\mu}f(z)\right)' - c(I_{\lambda,\mu}\, Lc\ f(z))'}{(c+1)I_{\lambda,\mu}f(z) - cI_{\lambda,\mu}\, Lc\ f(z)}$$

$$- \frac{\left(I_{\lambda,\mu}\, Lc\ g(z)\right)'}{\left(I_{\lambda,\mu}\, Lc\ g(z)\right)} \qquad (5.22)$$

Dengan mengubah persamaan $z(I_{\lambda,\mu}\ Lc\ f(z)' = (c+1)I_{\lambda,\mu}\ f(z) - cI_{\lambda,\mu}\ Lc\ f(z)$ pada persamaan (5.21) di atas maka diperoleh:

$$\frac{(1-\beta)P'(z)}{(1-\beta)P(z)+\beta} = \frac{(c+1)\left(I_{\lambda,\mu}f(z)\right)' - c(I_{\lambda,\mu}\, Lc\ f(z))'}{z(I_{\lambda,\mu}\ Lc\ f(z)'} - \frac{\left(I_{\lambda,\mu}\, Lc\ g(z)\right)'}{\left(I_{\lambda,\mu}\, Lc\ g(z)\right)}$$

Selanjutnya mengalikan semua sisi persamaan di atas dengan bilangan bikompleks z sehingga diperoleh:

$$\frac{(1-\beta)z\,P'(z)}{(1-\beta)P(z)+\beta}=\frac{(c+1)z\,\left(I_{\lambda,\mu}f(z)\right)'-cz\,(I_{\lambda,\mu}\,Lc\,f(z))'}{z(I_{\lambda,\mu}\;Lc\,f(z)'}-\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\,g(z)\right)'}{\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\,g(z)\right)}$$

$$\frac{(1-\beta)z\,P'(z)}{(1-\beta)P(z)+\beta}$$

$$=\frac{(c+1)z\,\left(I_{\lambda,\mu}f(z)\right)'}{z(I_{\lambda,\mu}\;Lc\,f(z)'}-c$$

$$-\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\,g(z)\right)'}{\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\,g(z)\right)}\qquad(5.23)$$

Berdasarkan persamaan di atas maka dapat dikatakan terdapat $g\epsilon S^{*}_{\lambda,\mu}(\alpha:\phi)$. Jika $g\epsilon S^{*}_{\lambda,\mu}(\alpha:\phi)$ maka dari teorema 5.1 $Lc\;g\epsilon S^{*}_{\lambda,\mu}(\alpha:\phi)$ sehingga pembuktian dapat di lanjutkan.

Diberikan

$$q(z)=\frac{1}{1-\mu}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\;Lc\,g(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\,g(z)}-\mu\right]\qquad(5.24)$$

Dengan $q(z)=1+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots$ adalah fungsi analitik di dalam U dengan $q(0)=1$ selanjutnya dengan menggunakan persamaan (5.2) persamaan (5.22) berubah menjadi:

$$(1-\mu)q(z)+\mu=\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\;g(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\;g(z)}$$

$$(1-\mu)q(z)+\mu=\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}g(z)-cI_{\lambda,\mu}\;Lc\;g(z)}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\;g(z)}$$

$$(1-\mu)q(z)+\mu=\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}g(z)}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\;g(z)}-c \qquad (5.25)$$

Kembali kepersamaan (5.22) bahwasanya dapat dilihat ada sisi persamaan yang sama yang dapat dilakukan substitusi persamaan integral liberalnya yaitu:pada fungsi $g(z)$ yang sudah diperoleh di persamaan (5.24), sehingga selanjutnya

$$\frac{(1-\beta)z\,P'(z)}{(1-\beta)P(z)+\beta}=\frac{(c+1)z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\;f(z)\right)'}-c-\left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}g(z)}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\;g(z)}-c\right]$$

$$\frac{(1-\beta)z\,P'(z)}{(1-\beta)P(z)+\beta}=\frac{(c+1)z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\;f(z)\right)'}-\left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}g(z)}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\;g(z)}\right]$$

$$\frac{(1-\beta)z\,P'(z)}{(1-\beta)P(z)+\beta}+\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}g(z)}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\;g(z)}=\frac{(c+1)z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\;f(z)\right)'}$$

Dan seterusnya diperoleh:

$$\left\{\frac{(1-\beta)z\,P'(z)}{(1-\beta)P(z)+\beta}+\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}g(z)}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\;g(z)}\right\}z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\;f(z)\right)'=(c+1)z(I_{\lambda,\mu}f(z))'$$

Dengan mengalikan ke dalam persamaan maka diperoleh:

$$\frac{(1-\beta)z\,P'(z)}{(1-\beta)P(z)+\beta}z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\;f(z)\right)'+\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}g(z)}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\;g(z)}z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\;f(z)\right)'$$
$$=(c+1)z(I_{\lambda,\mu}f(z))'$$

$$\left[\frac{(c+1)I_{\lambda,\mu}g(z)}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\;g(z)}z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\;f(z)\right)'\right]$$
$$=(c+1)z(I_{\lambda,\mu}f(z))'-\left[\frac{(1-\beta)z\,P'(z)}{(1-\beta)P(z)+\beta}\cdot z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\;f(z)\right)'\right]$$

$$(c+1)I_{\lambda,\mu}g(z)\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\;f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\;g(z)}\right]$$
$$=(c+1)z(I_{\lambda,\mu}f(z))'-\left[\frac{(1-\beta)z\,P'(z)}{(1-\beta)P(z)+\beta}\cdot z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\;f(z)\right)'\right]$$

Dan akhirnya diperoleh:

$$\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\;f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\;g(z)}\right]=\frac{(c+1)z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{(c+1)I_{\lambda,\mu}g(z)}-\frac{(1-\beta)z\,P'(z)}{(1-\beta)P(z)+\beta}\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\;f(z)\right)'}{(c+1)I_{\lambda,\mu}g(z)}$$

$$\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\,g(z)} - \frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}g(z)} = \left[\frac{(1-\beta)z\,P'(z)}{(1-\beta)P(z)+\beta}\cdot\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\,f(z)\right)'}{(c+1)I_{\lambda,\mu}g(z)}\right] \qquad (5.26)$$

Pada persamaan (5.20) kita substitusikan ke persamaan (5.26) sehingga diperoleh

$$\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\,g(z)} - \frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}g(z)} = \left[\frac{(1-\beta)z\,P'(z)}{\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\,g(z)}}\cdot\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\,f(z)\right)'}{(c+1)I_{\lambda,\mu}g(z)}\right]$$

$$\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\,g(z)} - \frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}g(z)} = (1-\beta)z\,P'(z)\cdot\frac{I_{\lambda,\mu}\,Lc\,g(z)}{(c+1)I_{\lambda,\mu}g(z)} \qquad (5.27)$$

Berdasarkan persamaan (5.25) dapat kita substitusikan ke persamaan (5.27) sehingga selanjutnya diperoleh:

$$\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\,g(z)} - \frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}g(z)} = \left[(1-\beta)z\,P'(z)\cdot\frac{1}{(1-\mu)q(z)+\mu+c}\right]$$

$$\frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\,Lc\,f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\,Lc\,g(z)} - \frac{z(I_{\lambda,\mu}f(z))'}{I_{\lambda,\mu}g(z)}\right] = \frac{z\,P'(z)}{(1-\mu)q(z)+\mu+c} \qquad (5.28)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan 5.20 ke persamaan 5.28 maka akhirnya diperoleh:

$$\frac{1}{(1-\beta)}(1-\beta)P(z)+\beta) - \frac{1}{(1-\beta)}\left(\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, Lc\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\ \ g(z)}\right)$$

$$= \frac{z\, P'(z)}{(1-\mu)q(z)+\mu+c}$$

Sedikit kakulasi maka persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi:

$$\frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, Lc\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\ \ g(z)} - \beta\right]$$

$$= \frac{P(z)+z\, P'(z)}{(1-\mu)q(z)+\mu+c} \qquad (5.29)$$

Berdasarkan lemma 2.2 $Re\{(1-\mu)q(z)+\mu+c\} > 0$ dan dengan mengambil

$$w = \frac{1}{(1-\mu)q(z)+\mu+c}$$

pada persamaan (5.29) maka dapat disimpulkan:

$$\frac{1}{(1-\beta)}\left[\frac{z\left(I_{\lambda,\mu}\, Lc\, f(z)\right)'}{I_{\lambda,\mu}\ \ g(z)} - \beta\right] \prec \psi(z)$$

atau

$P(z) + w(z)z\, P'(z) \prec \psi(z) \Rightarrow P(z) \prec \psi(z)$

Artinya

$f\epsilon\ Q^{*}_{\lambda\mu}(\alpha,\beta;\phi,\psi)$ maka $Lc\ f\epsilon\ Q^{*}_{\lambda\mu}(\alpha,\beta;\phi,\psi)$.

BAB VI

KESIMPULAN DAN SARAN

6.1 Kesimpulan

1. Fungsi analitik dan univalen dengan bentuk $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad , z \in U$ yang merupakan suatu kelas S yang ternormalkan . Bentuk persamaan tersebut mempunyai subkelas-subkelas fungsi univalen yaitu fungsi *starlike*, fungsi *convex* dan fungsi *close-to-convex*. Dengan menggunakan operator integral yang telah diperkenalkan oleh Choi-Saigo-Srivastava yaitu

$$z\left[I_{\lambda+1,\mu} f(z)\right]' = (\lambda + 1)\, I_{\lambda,\mu} f(z) - \lambda I_{\lambda+1,\mu} f(z)$$

$$z\left[I_{\lambda,\mu} f(z)\right]' = \mu\, I_{\lambda,\mu+1} f(z) - (\mu - 1) I_{\lambda,\mu} f(z)$$

dan dengan menggunakan konsep fungsi starlike yang strongly dan lemma 2.1 maka dapat disimpulkan bahwasannya:

a. Pada fungsi *starlike* sifat yang berlaku $f \in S^* (\alpha; \phi)$ mengimplikasikan $S^*_{\lambda,\mu+1} (\alpha; \phi) \subset S^*_{\lambda,\mu} (\alpha; \phi)$ adalah fungsi starlike yang strongly.

b. Pada fungsi *starlike* sifat yang berlaku $f \in S^* (\alpha; \phi)$ mengimplikasikan $S^*_{\lambda,\mu} (\alpha; \phi) \subset S^*_{\lambda+1,\mu} (\alpha; \phi)$ adalah fungsi starlike yang strongly.

c. Pada fungsi *convex* sifat yang berlaku adalah $f \in C^{*}(\alpha;\phi)$ mengakibatkan $C^{*}_{\lambda,\mu+1}(\alpha;\phi) \subset C^{*}_{\lambda,\mu}(\alpha;\phi) \subset C^{*}_{\lambda+1,\mu}(\alpha;\phi)$ adalah fungsi starlike yang strongly.

2. Dengan melibatkan integral Libera dan dengan menggunakan konsep fungsi starlike yang strongly dan lemma 2.1 juga maka dapat disimpulkan sifat-sifat subkelas pada fungsi univalen adalah:

a. Jika $f \epsilon S^{*}_{\lambda,\mu}(\alpha\colon\phi)$, maka $Lc\, f \epsilon S^{*}_{\lambda,\mu}(\alpha\colon\phi)$ adalah fungsi starlike yang strongly.

b. Jika $f \epsilon C^{*}_{\lambda,\mu}(\alpha\colon\phi)$, maka $Lc\, f \epsilon C^{*}_{\lambda,\mu}(\alpha\colon\phi)$ adalah fungsi convex yang strongly.

6.2 Saran

Pembahasan kali ini merupakan pengembangan daripada kelas-kelas yang telah diperkenalkan oleh peneliti sebelumnya. Operator integral yang digunakan juga operator integral yang yang telah diperkenalkan oleh Choi-Saigo-Srivastava pada tahun 2002. Penelitian selanjutnya dapat dilakukan dengan menggunakan kelas yang lain tetapi operator integral yana sama, atau dengan kelas yang sama tetapi dengan operator integral yang lain dalam membuktikan fungsi starlike yang strongly.

DAFTAR PUSTAKA

1. Aryani Fitri, 2010. On Inclusion Properties For Subclasses Involving Integral Operator, Prosiding SNTIKI
2. Aryani Fitri, 2012. Sifat-sifat Subkelas Fungsi Univalen Menggunakan Operator Integral (Operator Integral Jung, Kim, Srivastava), Prosiding SNTIKI.
3. Aryani Fitri, 2013, Aplikasi Operator Integral (Choi-Saigo-Srivastava) pada Sifat-sifat Subkelas Fungsi Univalen, Laporan Penelitian.
4. Bieberbach, L. 1916. Uber einige extremal probleme im Gebiete der konformen abdildung. Math . Ann. 77: 153-172.
5. Choi, Saigo dan Srivastava, 2002. Some Inclusion Properties of a Certain Family of integral Operators, J. Math. Anal. Appl. 276: 432-445.
6. De Branges, L. 1985. A proof of the Bieberbach conjecture. Acta Math. 154: 137-152.
7. Duren P.L. 1983. *Univalent fuctions.* Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo.
8. Fekete, M dan Szego, G, 1933. Eine Bermerkung uber Ungerade schlichte Funktionen. Jour . London Math. Soc. 8: 85-89.
9. I.B Jung,.Y. C. Kim, dan H. M Srivastava, 1993. The Hardy space of analytic functions associated with certain one-parameter families of integral operators. *J. Math. Anal. Appl.* **176 (**1**)**: 138–147.

10. Liu, J. L. 2001. Certain Integral Operator and Strongly Starlike Functions. IJMMS, 30 : 9 (569-574)

11. Liu, J. L. 2002. A Linear Operator and Strongly Starlike Functions. J. Math. Soc. Japan Vol. 54 No.4.

12. Liu, J. L. 2004. Strongly Starlike Functions Associated with the Dziok-Srivastava Operator. Tamkang Journal of Mathematics. Vol. 35 No. 1

13. Lowner, K. 1923. Untersuchungen uber schlicht konforme abbildungen des einheit skreises. I. Math Ann. 89: 103-121.

14. Mamoru Nunokawa. 1997. Some Result for Strongly Starlike Functions. Journal of Mathematical Analysis and Application. 212 : 98-106.

15. Maslina Darus. & Rabha W. Ibrahim. 2009. On Inclusion Properties of Generalized Integral Operator involving Noor Integral. *Far East J. Math. Sci*. **33** (3): 309-321.

16. Noor, K.I dan Hussain, S. 2009. An Integral Operator and Its Application on Certain of Analytic Functions. Advances in Applied Mathematical Analysis. Vol. 4 (1) : 51-62.

17. Pommerenke, Ch. 1973. *Univalent functions*: *with a chapter on quadratic differentials by gerd jensen.* Vandenhoeck & Ruprecht In Gottingen.